

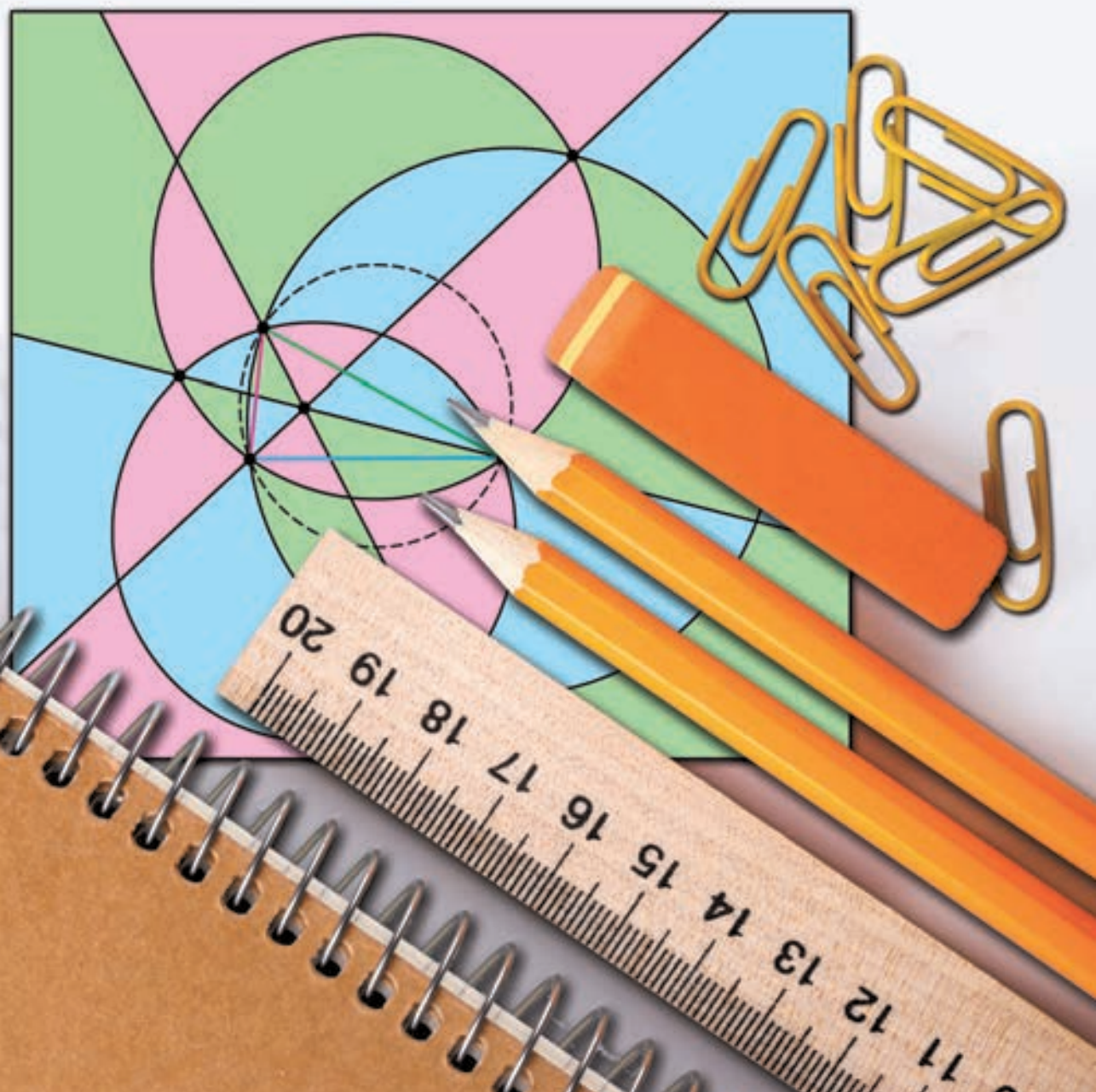
ISSN 0130-2221

2021 · № 6

ИЮНЬ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## Другой русский язык

За протяжении многовековой истории языка его система звуков преобразуется; при этом звучание отдельных слов может до неузнаваемости измениться. Изменения звуков подчинены обычно строгим закономерностям (фонетическим законам).

Давайте предположим, что развитие русского языка пошло бы в соответствии с некоторой воображаемой совокупностью фонетических законов. Тогда один из хорошо известных текстов приобрел бы в «новорусском» языке следующий вид (правила чтения букв те же, что и в обычном русском языке):

Ма тата сами сини рави,  
Ката ни суку санима,  
Йа вуваса сипа сатави  
Йи руси витума ни ма.  
Йива рими руки навука;  
На, паси ма, какайа кука  
Пани сити йи ти йи на,  
Ни йаката ни саку ра!  
Какайи никайи кавава  
Парусивава сапара,  
Йиму патуки парара,  
Писана панаси рикава,  
Тика йи тума ра сипа:  
Ката си са вама типа!

### ЗАДАНИЕ №1

Определите, что это за текст.

### ЗАДАНИЕ №2

По каким фонетическим законам образовался язык, на котором написан этот текст? К какому языку – устному или письменному – они применялись? Какова основная закономерность «новорусской» звуковой системы?

**В номере:**

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,  
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободещкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Чебышёв и теория приближений. *В.Протасов*  
5 Удар и его окрестности. *Л.Ашкинази*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 10 Задачи М2654–М2657, Ф2661–Ф2664  
11 Решения задач М2642–М2645, Ф2649–Ф2652  
18 Педальные отрезки: где максимум? *М.Дидин,  
П.Кожевников*  
22 Скрытая симметрия. *Е.Бакаев*

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи  
24 Перечитывая фантастов. *С.Парновский*

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 26 Итоги конкурса имени А.П.Савина  
2020/21 учебного года

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 27 Задача о шаре в треугольной призме.  
*Г.Шарыгин*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Размерность и подобие

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Издалека долго течет река... *А.Стасенко*

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 38 Что такое дождевание. *С.Дворянинов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 40 LXXXIV Московская математическая олимпиада  
школьников  
42 Московская олимпиада школьников по физике  
2021 года

## ИНФОРМАЦИЯ

- 51 Заочная школа СУНЦ НГУ  
56 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (41)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Педальные отрезки:  
где максимум?»*  
II *Лингвистические задачи*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Чебышёв и теория приближений

В.ПРОТАСОВ

**З**амена сложного простым – вот девиз теории приближений.

Чтобы не иметь дело со сложным объектом, нужно приблизить его простым. Основные вопросы: чем приближать, как, с какой точностью? Примеры приближений функций восходят еще к Архимеду, и в математике они встречались постоянно. Но датой рождения теории приближений считается 1854 год, когда П.Л.Чебышёв опубликовал работу «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», где сформулировал первые принципы поиска наилучших приближений функций.

Предположим, мы исследуем механизм, который задает движение точки по некоторой кривой – как на рисунке 1. Как

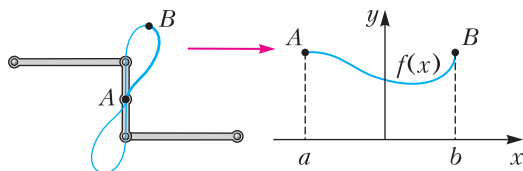


Рис. 1

описать траекторию движения? Если не получается точно, сделаем приближенно. Например, прямой линией. Возьмем дугу  $AB$  этой кривой и приблизим ее прямой. Для этого представим дугу кривой как график функции  $f(x)$ , а прямую – линейной функцией  $p(x) = kx + b$  (рис.2). Каче-

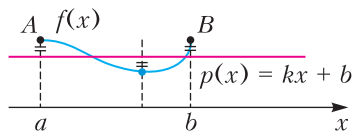


Рис. 2

ство приближения П.Л.Чебышёв предложил измерять *наибольшим уклонением*:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|,$$

вместо более привычных тогда среднего или среднего квадратичного уклонений. Будем обозначать наибольшее уклонение символом  $\|f - p\|$  и называть его *расстоянием* между  $f$  и  $p$ . Ключевая догадка Чебышёва состоит в том, что ближайшая к  $f$  прямая должна иметь на отрезке «три точки опоры», в которых абсолютная величина разности  $f(x) - p(x)$  принимает (одно и то же) наибольшее значение, т.е. равна  $\|f - p\|$ , а знаки этой разности чередуются. Если трех точек опоры нет, то такая прямая не может быть ближайшей. Ее всегда можно немного пошевелить, чтобы величина  $\|f - p\|$  уменьшилась. Постарайтесь это объяснить самостоятельно (в помощь будет рисунок 3).

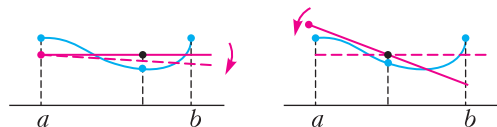


Рис. 3

Предположим, мы нашли самую близкую к  $f$  прямую, но качество приближения нас по-прежнему не устраивает. Нужно приблизить точнее, а линейные функции себя исчерпали. Единственный выход – расширить арсенал приближающих функций. Поскольку линейные функции – это многочлены степени 1, попробуем использовать многочлены более высокой степени. А именно, новый класс приближающих функций будет состоять из многочленов степени не выше  $n$ . Поскольку этот класс содержит и линейные функции, результат будет по крайней мере не хуже.



Итак, задача приближения формулируется следующим образом.

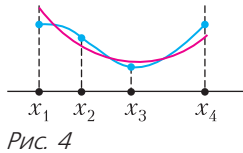
**Задача 1.** На отрезке задана непрерывная функция  $f$ . Среди всех многочленов степени не выше  $n$  нужно найти тот, который имеет наименьшее отклонение от  $f$ .

Оказывается, что при любом  $n$  такой наилучший многочлен всегда существует, и притом только один! Он будет иметь точки опоры, их число равно  $n + 2$ . П.Л.Чебышёв сформулировал следующую теорему.

**Теорема.** Для каждой функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$  и числа  $n$  существует единственный многочлен, решающий задачу 1. Он характеризуется таким свойством: найдутся  $n + 2$  точки  $x_1 < \dots < x_{n+2}$  на данном отрезке, в которых модуль разности  $f(x) - p(x)$  принимает (одно и то же) максимальное значение, а знаки этой разности чередуются, т.е.  $f(x_k) - p(x_k) = (-1)^k \alpha \|f - p\|, k = 1, \dots, n + 2$ , где  $\alpha$  равно 1 или  $-1$ .

Уже в XX веке выдающийся советский математик С.Н.Бернштейн, развивавший идеи Чебышёва, назвал такую систему из  $n + 2$  точек *альтернансом*, от французского «alternance» – чередование.

На рисунке 4 изображено наилучшее приближение функции параболой. В этом случае многочлен  $p$  квадратичный, значит,  $n = 2$ , и альтернанс состоит из четырех точек.



Если многочлен имеет альтернанс, то он – ближайший к функции  $f$  среди всех многочленов степени не выше  $n$ . Докажем это от противного. Пусть нашелся многочлен  $q$  с меньшим расстоянием от  $f$ , степень которого также не превосходит  $n$ . Тогда его отклонение во всех точках альтернанса  $x_k$  будет меньше, чем  $\|f - p\|$ . Следовательно, на каждом из интервалов  $(x_k, x_{k+1})$  многочлен  $q(x) - p(x)$  меняет знак, а значит, где-то обращается в ноль. Всего интервалов  $n + 1$ , поэтому многочлен  $q(x) - p(x)$  должен иметь не менее  $n + 1$  корней, что невозможно, потому что его степень строго меньше  $n + 1$  (рис.5).

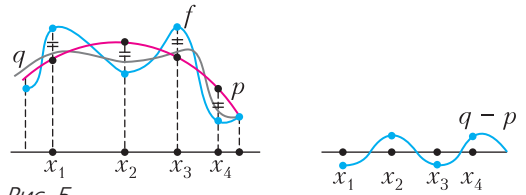


Рис. 5

Теорема Чебышёва неконструктивна: она не позволяет явно найти многочлен  $p$ , поскольку неизвестны точки альтернанса. Но на это есть быстрые численные алгоритмы. Самый известный из них – алгоритм, разработанный Е.Я.Ремезом еще в 1934 году! Он реализует теорему Чебышёва, находя альтернанс, а с ним и многочлен  $p$ , методом последовательных приближений. На современных компьютерах это занимает считанные секунды.

Какова точность приближения наилучшим многочленом? Это зависит от гладкости функции  $f$ . Например, если  $f$  имеет вторую производную, которая не превосходит по модулю 1, то расстояние от  $f$  до ближайшего многочлена степени  $n$  не пре-

восходит  $\frac{C}{n^2}$ , где  $C$  – определенное число, не зависящее от  $n$  (константа Фавара). Скажем, для произвольной  $f$  наилучший многочлен десятой степени будет уклоняться от  $f$  на расстояние порядка 0,01. А вот если  $f$  имеет третью производную, то отклонение уже будет порядка 0,001. Это следует из *прямых теорем теории приближений*, полученных уже после Чебышёва, в XX веке.

Приближать, конечно, можно не только многочленами. Очень популярный способ – приближать суммами синусов и косинусов, т.е. тригонометрическими многочленами. Также можно приближать суммами экспонент или рациональными дробями (отношениями двух многочленов). Есть даже особое понятие *чебышёвской системы функций*, с помощью которых можно приближать, используя альтернанс.

Но вернемся к многочленам. Для некоторых функций ближайший многочлен степени не выше  $n$  можно найти в явном виде, не прибегая к численным алгоритмам. Например, для функции  $f(x) = x^{n+1}$ , если  $p$  – многочлен наилучшего приближе-

ния степени не выше  $n$ , то разность  $x^{n+1} - p(x)$  является многочленом степени  $n + 1$ , наименее уклоняющимся от нуля. Мы приходим к такой задаче.

**Задача 2.** Среди всех многочленов данной степени со старшим коэффициентом 1 нужно найти тот, который менее всего уклоняется от нуля на заданном отрезке.

Обозначим степень многочлена через  $k$ , а отрезок возьмем  $[-1; 1]$  (любой другой отрезок можно свести к нему подходящей линейной заменой переменной). Теорема Чебышёва гарантирует, что существует единственный многочлен, решающий задачу 2, и у него есть альтернанс из  $k + 1$  точки. Остается только предъявить такой многочлен. Делаем замену  $x = \cos t$  и обозначаем  $T_k(x) = \cos kt$ . Иначе говоря, для каждого  $k$  выражаем  $\cos kt$  через  $\cos t$ . В результате получаем знаменитые многочлены Чебышёва. Вот первые четыре из них:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Читатель, разумеется, узнал в многочлене  $T_2$  формулу для косинуса двойного угла, а в  $T_3$  — для тройного угла. Математики определяют многочлен Чебышёва так:  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ . Несмотря на «тригонометрический» вид данной функции, она является многочленом. Это следует из рекуррентного соотношения  $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ , которое просто выводится из формулы для суммы косинусов:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) &= \cos(k+1)t + \cos(k-1)t = \\ &= 2 \cos kt \cos t = 2xT_k(x). \end{aligned}$$

Начиная с первых двух многочленов  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ , находим последовательно  $T_2(x)$ , затем  $T_3(x)$  и т.д. На рисунке 6 изображен многочлен Чебышёва. По индукции доказываем, что  $T_k$  — многочлен степени  $k$  со старшим коэффициентом  $2^k$ . Главное: у многочлена  $T_k$  есть альтернанс! В самом деле, функция  $\cos kt$  колеблется между 1 и  $-1$ , принимая крайние значения поочередно в точках  $0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}, \pi$ . После замены  $x = \cos t$  получаем, что много-

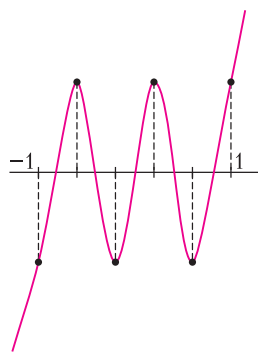


Рис. 6

член  $T_k(x)$  делает то же, чередуя значения  $\pm 1$  в точках  $1, \cos \frac{\pi}{k}, \dots, \cos \frac{(k-1)\pi}{k}, -1$ , которые и составляют альтернанс. Многочлен  $2^{-k}T_k(x)$  будет иметь альтернанс в этих же точках и старший коэффициент 1, а значит, он является решением задачи 2.

Многочлены Чебышёва дают решения огромного числа экстремальных задач. Например, среди всех многочленов степени  $k$ , у которых уклонение от нуля на отрезке  $[-1; 1]$  не превосходит 1, многочлен  $T_k$  имеет на этом отрезке максимально возможную производную (равную  $k^2$  в точке  $x = 1$ ) и максимально возможные производные высших порядков. Это следует из неравенства, доказанного А.А. Марковым, учеником П.Л. Чебышёва.

А вот пример из вычислительной математики. Чтобы приблизить функцию  $f$ , пусть на том же отрезке  $[-1; 1]$ , но при этом не искать альтернанс, часто проводят интерполяцию по нескольким точкам. Это значит, что берут «сетку» из  $k$  точек  $z_1, \dots, z_k$  и строят многочлен  $p$ , для которого  $f(z_i) = p(z_i)$  при всех  $i$ . Какую сетку для этого лучше всего брать? Оказывается, не равномерную! Надо взять в качестве  $z_1, \dots, z_k$  корни многочлена Чебышёва  $T_k(x)$ . Именно такая сетка дает наилучшее приближение. Корни  $T_k$  найти просто — достаточно решить уравнение  $\cos kt = 0$ .

Многочлены Чебышёва применяются в вычислительной математике, моделировании, статистике. Крупнейший международный интернет-ресурс <https://www.chebfun.org>, посвященный приближенным вычислениям, называется Chebfun («Chebyshev fun»). Заходите и убедитесь сами — идеи Чебышёва в теории приближений живы и активно развиваются.

# Удар и его окрестности

Л. АШКИНАЗИ

В любом школьном учебнике физики рассмотрен случай прямого центрального соударения двух шаров – абсолютно упругого и абсолютно неупругого. Соответствующие уравнения, по два для каждого случая, вы, конечно, можете написать и решить. В реальной жизни не бывает «прямого центрального» и не бывает «шаров» – какие-то отклонения есть всегда. Кстати, раз нет шаров, то как нам формулировать условие «прямызны» и «центральности» и будет ли нам с этой формулировки прок? Ну и, конечно, не бывает «абсолютно упругого» и, более того, не бывает «удара». Вводя это понятие, мы обычно пренебрегаем временем взаимодействия, а для изменения импульса за бесконечно малое время нужна (вспомните уравнение  $m \cdot \Delta v = F \cdot \Delta t$ ) бесконечно большая сила, которая разрушит любой материал. Почему же все это есть в учебниках, и далеко не только в школьных?

Когда в физике рассматривают модели, выбор конкретного упрощения определяется формальной возможностью получения решения и разумностью этого решения. Причем «разумность» зависит от того, как мы собираемся применять решение. Если речь идет о практическом применении, т.е. об инженерии, о создании вещей, то главное – достаточно ли точно полученное решение в тех условиях и при тех ограничениях, для которых оно нам нужно. Если речь о практике пока не идет, т.е. если это «внутрифизическая» модель, то ситуация сложнее. Тут важно, насколько модель опирается на фундаментальную физику, есть ли в ней непонятные подгонные параметры и сколько их, насколько модель логична, допускает ли она развитие. Это менее четкие критерии, поэтому в физике могут в течение какого-то

времени сосуществовать несколько моделей одного и того же круга явлений. Инженерия таких ситуаций старается избегать, хотя это не всегда удается. Например, в дисциплине, название которой вы, наверное, слышали – «сопротивление материалов», есть несколько способов оценки предельных нагрузок на элементы конструкций, которые так и называют – «теории прочности». Но это редкая ситуация.

Модель удара, изложенная в школьных учебниках, существует примерно три века (ее история рассказана, например, вот тут – <http://physiclib.ru/books/item/f00/s00/z0000053/st059.shtml>). Поэтому она не «внутрифизическая», а вполне применимая на практике. Кроме того, у нее есть полезные и интересные расширения, которым и посвящена данная статья. Причем расширениям как школьным, встречающимся в задачах и вопросах на экзаменах, так и внешкольным.

Но для начала, чтобы освежить эту модель в памяти и «закрепить на панели быстрого доступа», обозначим массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости, соответственно,  $v_{1\text{ до}}$ ,  $v_{2\text{ до}}$ ,  $v_{1\text{ после}}$  и  $v_{2\text{ после}}$  и для ситуации  $v_{2\text{ до}} = 0$  построим красивые графики зависимости  $v_{1\text{ после}}/v_{1\text{ до}}$  и  $v_{2\text{ после}}/v_{1\text{ до}}$  от  $m_1/m_2$  для обоих типов соударений (рис. 1). Кстати, подумайте, почему мы строили зависи-

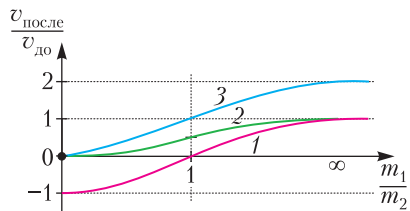


Рис. 1. Поведение шаров после соударения. Кривая 1 относится к первому шару в случае упругого удара; кривая 2 – к обоим шарам при неупругом ударе; кривая 3 – ко второму шару в случае упругого удара

мости для, как принято говорить в физике, «обезразмеренных» величин.

Полюбовавшись на графики, пойдем дальше. Простейший вариант задачи по физике – когда нужно использовать ровно то, что написано в учебнике. Чаше составитель задачи должен, взяв за основу что-то простое из учебника, «навесить» на задачу что-то еще, причем тоже имеющееся в учебнике – чтобы эта задача стала пригодна для ЕГЭ или иного экзамена.

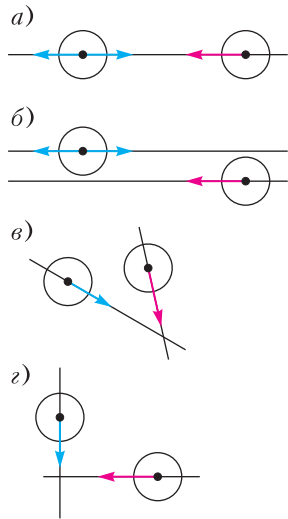


Рис. 2. Различные типы ударов: а) прямой центральный; б) прямой нецентральный; в) косой; г) косой в частном случае

Например, в случае прямого центрального удара (рис.2,а) можно постулировать, что в момент соударения тела обмениваются какой-то массой – вводится одна новая величина, добавляются уравнения, связывающие новые массы со старыми. Общее количество параметров увеличивается с 6 до 9, количество независимых уравнений становится не 2, а 4, стало быть, и неизвестных может быть теперь не 2, а 4. Убедитесь сами, что все именно так.

Разумеется, вы понимаете, что законы физики определяют, каковы будут величины после взаимодействия (например, скорости после столкновения), но автор задачи мог объявить неизвестными любые из параметров. Более того, на экзаменах очень часто в соседних вариантах дается одна и та же по существу задача, но с разными наборами «неизвестных». И надо быть внимательным, чтобы не решить по неаккуратности задачу из другого варианта – это трактуется как списывание.

Другой вариант формального усложнения задачи – указать, что какая-то доля суммарной кинетической энергии переходит

в тепло и это надо учесть в решении, а также определить, насколько нагреются тела при известных удельных теплоемкостях. Либо можно задать нагрев и сделать неизвестной одну из удельных теплоемкостей (сообразите сами, почему одну). При этом должно быть указано, что нагрев тел одинаков, либо уточнено, как распределяется между ними тепло. Всерьез это посчитать трудно, но если предположить, что доли энергии деформации, преобразующиеся в тепло, одинаковы, то отношение тепловыделений будет пропорционально энергии деформации, формула для которой известна. Но даже если не заморачиваться распределением тепла, то составитель задач может придумать всякую экзотику даже на базе простейшего уравнения  $Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \Delta T$ . Например, попросить определить материалы, благо на ЕГЭ есть список материалов с их параметрами, либо предложить определить диапазон возможных значений  $c_1$  и  $c_2$ .

Еще замечание в рамках прямого и центрального удара – почему-то обычно не оговаривается, что шарики не вращаются. Посмотрим, на что это могло бы повлиять. Если они вращаются так, что линейные скорости поверхности одинаковы, то все просто – даже при наличии трения ( $\mu N \neq 0$ ) нет касательных сил. Если скорости не равны, жизнь становится сложнее. При коэффициенте трения, равном нулю, и отсутствии обмена массами угловая скорость сохраняется – опять же нет касательной силы и нет момента. При наличии обмена массами в игру вступает закон сохранения момента импульса и угловые скорости изменяются.

А вот если коэффициент трения нулю не равен, то получается явная некорректность. У нас же «удар», время взаимодействия равно нулю, но сила, с которой шарики давят друг на друга, бесконечна, значит, и сила трения бесконечна. А путь, пройденный поверхностью за нулевое время, равен нулю! Иными словами, и работа силы трения (сила на путь) и переданный ею импульс (сила на время) не определены (ноль на бесконечность). Мы уперлись в границу модели, для физики это ситуа-



ция нормальная – у любой модели есть границы, их полезно знать. В идеальном учебнике они должны быть указаны, или – если мы их не знаем – должно быть указано, какова область действия модели, т.е. до каких значений параметров она работоспособна и с какой точностью проверена. В данном случае у нас есть, однако, лазейка – если в условии сказано, что соударение абсолютно упругое, то работа силы трения равна нулю. Но для импульса такой лазейки нет, и некорректность остается.

Правда, иногда «удар» определяют иначе и аккуратнее – как взаимодействие достаточно короткое, чтобы можно было пренебречь внешними силами. В этом случае время соударения не равно нулю, силы не равны бесконечности и то, во что мы уперлись в предыдущем абзаце, мы обошли. Но все равно при абсолютной упругости соударения нет работы силы трения, а значит – или нет этой силы или нет перемещения. Однако импульсом шарики обмениваться могут, а следовательно, могут и изменять свои угловые скорости, и разлетаться вбок. Отсюда мораль – внимательно читать определения, ибо это тоже часть модели, а разные определения означают, что у нас разные модели. К поведению вращающегося шарика с трением мы еще вернемся.

Следующий шаг в глубину задачи – прямой не центральный удар (рис.2,б), шарики радостно летят по параллельным прямым и прикидывают, столкнутся ли они. Тут в игру вступают три параметра – два радиуса и расстояние между прямыми. Если оно равно нулю, имеем предыдущую задачу – центральный удар. Если расстояние больше суммы радиусов, то соударения вообще нет. Если столкновение происходит, то эти три параметра – точнее, отношение между ними – определяют положение точки столкновения и направления действующих на шарики при столкновении сил. Если соударение абсолютно неупругое, то все это не имеет значения – у нас опять два уравнения и две неизвестные величины, например скорости после соударения.

Если соударение упругое, полностью или частично, то новые параметры – точка столкновения и направления сил – делаются важны. Если трения нет, то силы – это только силы реакции, они перпендикулярны поверхности и проходят через центры шаров. Их компоненты, направленные вдоль параллельных прямых, влияют на продольные скорости, а поперечные компоненты вызывают разлет шариков поперек прямых. Задача вполне решаемая, но в таком виде ее в школе не дают, а поступают проще – убивают одно неизвестное. Действительно, у нас теперь три уравнения (для энергии, импульса вдоль и поперек), а неизвестных величин четыре. В естественной ситуации это компоненты скоростей после соударения, и найти их, не зная наших новых параметров, нельзя. Но то в природе, а в школе поступают просто, делают неизвестными три любые величины – по числу уравнений. Например, полагают «известной» минимум одну из компонент одной из скоростей после соударения. Либо поступают немного приличнее – просят найти не сами компоненты, а отношение каких-то двух, опять же искусственно уменьшая количество неизвестных.

Если ввести коэффициент трения, то столкновение перестает быть абсолютно упругим, и у нас возникает выбор. Можно это игнорировать, применять закон сохранения кинетической энергии, а силу трения считать пропорциональной реакции опоры. В этом случае учет трения сведется к тому, что сила, с которой один шарик действует на другой, станет не перпендикулярна поверхности – у нее возникнет касательная компонента. И все было бы хорошо, но сила трения пропорциональна реакции опоры только при наличии движения. В начале столкновения шарики друг по другу действительно скользят, но не могут ли они в процессе взаимодействия остановиться? Если же мы отказываемся от абсолютной упругости, мы либо теряем одно уравнение, либо нам надо честно посчитать работу силы трения и вычесть результат из кинетической энергии. Это будет не простая задача, особенно с учетом

того, что в какой-то момент скольжение может и прекратиться. К этой проблеме мы еще вернемся.

Еще один шаг в глубину – косоуго соударение (рис.2,в), когда начально шарики летят по не параллельным прямым. В таком случае для выяснения, столкнутся ли шарики и если да, то в какой точке, надо разбираться с хитрой геометрией этой задачи – возникают два новых параметра, начальные расстояния от пересечения прямых (и этот ужас на плоскости, а в объеме будет ужас-ужас-ужас). Подумайте, как это можно было бы сделать. Дальше ситуация такова. Если столкновение абсолютно неупругое, то надо вводить оси координат, искать проекции импульсов исходных тел на эти оси и определять движение суммарного тела из закона сохранения импульса. В школе, для упрощения жизни несчастного школьника, прямые делают перпендикулярными (рис.2,з), факт столкновения вводят в условие, и решение делается очевидным. Если же столкновение абсолютно упругое, то повторяется все, изложенное выше, и, естественно задачу можно сделать вполне решаемой, расположив прямые, например, под прямым углом и сразу указав точку касания. Подумайте, как бы вы выбрали диаметры шариков и точку касания, если бы вам предложили адаптировать эту задачу для себя, любимого. Кстати, вот новый тип задач по физике – задача дается с частично свободным условием и предлагается сделать из нее две – одну возможно проще, а другую возможно сложнее. Второе, кстати, может быть сложнее, чем первое!

Деление ударов на абсолютно упругие и абсолютно неупругие имеет два связанных недостатка. Первый – у нас нет характеристики для промежуточных случаев, вдобавок один из крайних тоже является идеализацией. Второй недостаток – эти два крайних случая характеризуются разными параметрами: один чем-то, связанным с энергиями, другой – со скоростями. Это похоже на такой способ оценивания контрольных по физике: «абсолютно плохая» работа – это такая, где не решена ни одна задача, а «абсолютно хорошая» – написан-

ная идеальным почерком. И все, никаких других оценок и критериев. Как вам такая идея? Естественный выход – характеризовать все виды удара долей потерь кинетической энергии. Но выход этот плох, потому что при абсолютно неупругом ударе потери кинетической энергии могут быть и очень малыми, например, при близости начальных скоростей. Кстати, это ведь означает, что удар может быть и абсолютно неупругим и сколь угодно близким к абсолютно упругому!

В технике для характеристики удара вводится параметр «коэффициент восстановления», причем существуют два (правда, близких) способа его определения. Первый способ используется, когда тело сталкивается с заведомо неподвижной преградой – т.е. она изначально покоится и ее масса много больше массы летящего тела. Тогда этот коэффициент определяют как  $k = v_{1 \text{ после}} / v_{1 \text{ до}}$ . Второй способ не использует этого предположения, тогда

$k = \left| (v_{1 \text{ после}} - v_{2 \text{ после}}) / (v_{1 \text{ до}} - v_{2 \text{ до}}) \right|$ . Вторым способом предложил не кто-нибудь, а сам Ньютон. Первый способ является просто частным случаем второго, а формулируют его отдельно просто потому, что его удобно применять для характеристики упругих свойств материалов, если из них можно сделать и маленький шарик, и большую плиту. Теперь посмотрите на рисунок 1 для случая абсолютно упругого удара и убедитесь, что определение Ньютона работает во всем диапазоне отношений масс.

Вам, будем надеяться, уже хочется заглянуть «внутри» процесса соударения и узнать, какова его длительность. Кроме того, мы обещали сказать что-то о процессе соударения с трением, когда возникает вращение. Эти вопросы вполне доступно для школьников и весьма подробно разобраны в книге Е.И.Бутикова, А.А.Быкова и А.С.Кондратьева «Физика в примерах и задачах», и она, к счастью, есть в интернете. Мы же обратимся к иной задаче, тоже связанной с «внутренностями» процесса удара, но менее известной.

Ядро этой задачи таково. Имеется шар известного размера, который изначально покоится. По прямой, проходящей через его центр, летит тело много меньшей массы, которое сталкивается с этим шаром. Сила, действующая между телами, считается известной. Каковы дальнейшие события? Условие на массы означает, что большой шар покоится, точнее – движется много медленнее малого тела. Далее, если сила равна нулю (очень часто именно так проще всего начинать рассмотрение), то взаимодействие отсутствует – большое покоится, малое летит, удивляясь, что его скорость не изменилась. Начинаем увеличивать силу – начинается обмен импульсами, причем мы можем пользоваться и законом сохранения энергии, вычитая из кинетической энергии работу действующей между телами силы  $A = FD$ , где  $D$  – диаметр. При дальнейшем увеличении силы мы приходим к «абсолютно неупругому удару», когда малое тело останавливается внутри большого. Вы сами можете написать соответствующие уравнения и получить решение.

Если отказаться от условия на соотношение масс, то придется учитывать, что большое тело тоже перемещается, и тогда движение малого тела происходит не до остановки, а до совпадения скоростей. Можно рассмотреть и ситуацию, когда большое тело имеет начальную скорость, это не сильно усложнит задачу.

У этой модели существуют несколько симпатичных вариантов усложнения, некоторые из них встречаются в задачниках. Например, малое тело может лететь по прямой, не проходящей через центр большого тела. В этом случае у силы  $F$  возникает момент, и большое тело начинает, очевидно, вращаться. Менее очевидно, что при этом у большого тела возникает компонента скорости, направленная поперек исходного направления движения малого тела. Другой вариант усложнения – если начальная скорость большого тела направлена не вдоль прямой, по которой изначально летит малое тела, а, например, перпендикулярно. Рассмотрите эту ситуацию и убедитесь, что вращение возникает

и в этом случае. А вот если малое тело попадает в большое, летя по прямой, проходящей через центр не имеющего линейной скорости, но изначально вращающегося большого тела, то его вращение замедлится. «Все страньше и страньше», – сказала бы Алиса. (Помните такую?)

Если изложенное выше показалось вам интересным, почти наверняка вам будут интересны и статьи об ударе, ранее опубликованные в журнале «Квант» – А.Панова (1990, №8), В.Козлова (1988, №9 и 1995, №4), С.Хорозова (1997, №4) и А.Гроссберга и М.Каганова (1993, №9/10 и 1996, №2). Причем полезно прочесть их все, потому что авторы подходят к явлению с разных сторон и строят разные его модели – иногда более математические, иногда более физические. А из последней статьи вы еще и узнаете, почему при столкновении слышен звук и какую долю энергии он уносит.

В заключение... оторвемся от книги или монитора и посмотрим наверх. Как написал Станислав Лем, космос не пуст – «его непрерывно пронизывают взгляды миллионов живых существ». Может быть, сейчас ваш взгляд пересекается с чьим-то взглядом с другого конца Галактики. В космосе тоже есть столкновения, известен один случай столкновения спутников, и вообще для космических аппаратов существует опасность столкновения со всяким мусором, летающим над нами. Правда, при этих скоростях рассмотренные нами модели не работают, механизм взаимодействия выглядит иначе и всегда происходит разрушение. Если человечество будет продолжать осваивать космос, то важность соответствующих задач будет расти, так что, если вы получите серьезное образование и займетесь этим классом задач, скучать вам не придется.

Кстати, в статье мы не раз упоминали вращение. А галактики, как вы знаете, вращаются. Не связано ли это со столкновениями чего-то, из чего образовались галактики?

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2654, M2655, M2657 предлагались на заключительном этапе XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задача M2656 предлагалась на XLII Турнире городов.

## Задачи M2654–M2657, Ф2661–Ф2664

**M2654.** На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $E$  и  $F$ , причем  $E$  лежит между  $B$  и  $F$  (рис.1). Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Прямые  $AE$  и  $DF$  касаются окружности, описанной около треугольника  $AOD$ . Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника  $EOF$ .

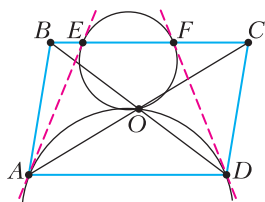


Рис. 1

А.Кузнецов

**M2655.** Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди – сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник  $1 \times 2$  или  $2 \times 1$  такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить.

М.Дидин, А.Кузнецов

**M2656.** Возрастающая последовательность натуральных чисел  $a_1 < a_2 < \dots$  такова, что при каждом  $n > 100$  число  $a_n$  равно наименьшему натуральному числу, большему  $a_{n-1}$  и не делящемуся ни на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Докажите, что в такой последовательности лишь конечное число составных чисел.

П.Кожевников

**M2657\*.** Натуральные числа  $n > 20$  и  $k > 1$  таковы, что  $n$  делится на  $k^2$ . Докажите, что найдутся натуральные числа  $a, b$  и  $c$  такие, что  $n = ab + bc + ca$ .

А.Храбров

**Ф2661.** Для плавного изменения уровня расположения детали над поверхностью стола соорудили показанную на рисунке 2 установку, состоящую из нескольких шарнирно соединенных стержней. Углы, образованные стержнями, равны  $120^\circ$  и  $60^\circ$ . Стержень, отмеченный на рисунке красным цветом, стальной, он имеет длину  $L = 10$  см. Его нагревают со скоростью  $10$  К/мин. С какой скоростью поднимается деталь? Ко-

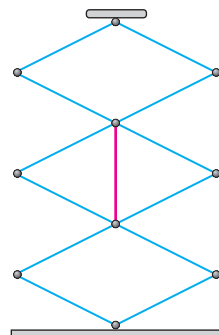


Рис. 2

эффицент теплового расширения стали равен  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

*С.Варламов*

**Ф2662.** Горизонтальный стержень, всегда находящийся на одной высоте, жестко соединяет два параллельных друг другу вертикальных стержня и перпендикулярен им (рис.3).

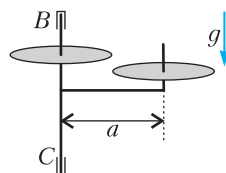


Рис. 3

которых расположены на расстоянии  $a$  друг от друга, насажены подшипники (тоже невесомые). А к внешним обоймам подшипников прикреплены два одинаковых массивных плоских тонких диска с равномерным распределением масс по их поверхностям. Оси симметрии дисков совпадают с осями симметрии вертикальных стержней. Один из вертикальных стержней (на рисунке слева) может свободно (совсем без трения) вращаться вокруг своей оси симметрии (и эта ось  $BC$  всегда неподвижна). Трение в подшипниках мало, поэтому на небольших промежутках времени им можно пренебречь. Сначала конструкцию, находящуюся в вакууме, раскрутили так, что она как целое вращалась вокруг оси  $BC$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , т.е. траектории всех точек конструкции представляли собой горизонтальные окружности. Затем горизонтальный стержень быстро остановили и тут же вновь отпустили. Через некоторое время за счет небольшого трения в подшипниках система снова стала крутиться как целое, но с новой угловой скоростью, равной  $\omega/10$ . Каковы радиусы дисков?

*В.Дмитриев*

**Ф2663.** Про планету Cheese известно, что она представляет собой однородный шар радиусом  $R$ , в котором имеется сферическая полость радиусом  $R/2$ , причем полость соприкасается с поверхностью планеты (рис.4). Плотность материала планеты  $\rho$ . Также известно, что эта планета равномерно вращается вокруг оси, проходящей че-

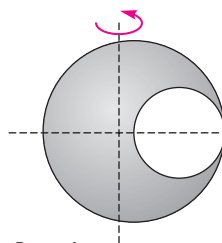


Рис. 4

рез ее центр масс и перпендикулярной оси симметрии планеты. Внутри полости было решено разместить наблюдательный пункт так, чтобы он оказался на оси симметрии планеты и при этом не потребовалось бы включать двигатели или привязывать его к внутренним стенкам полости. Вычисления показали, что этот наблюдательный пункт может располагаться в самом центре полости. С какой угловой скоростью вращается планета?

*В.Никонов*

**Ф2664.** Расстояние от Юпитера до Солнца примерно в 5,2 раза больше среднего расстояния от Земли до Солнца. Юпитер светит не собственным излучением, а рассеянным во все стороны солнечным светом, которым он освещается. Плоскости почти круговых орбит Земли (З) и Юпитера (Ю) при их движении вокруг Солнца (С) почти совпадают. При каком значении угла ЗСЮ видимая с Земли часть освещенной поверхности Юпитера самая маленькая? Найдите также отношение видимых с международной космической станции (МКС) яркостей Юпитера в ситуациях, когда видно почти 100% его освещенной поверхности.

*Д.Сергеев*

**Решения задач М2642–М2645, Ф2649–Ф2652**

**М2642.** Ненулевые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенствам

$$x^{2n} - y^{2n} > x \text{ и } y^{2n} - x^{2n} > y$$

при некотором натуральном  $n$ . Может ли произведение  $xy$  равняться отрицательному числу?

**Ответ:** не может.

Докажем, что  $xy > 0$ . Предположим противное:  $xy < 0$  ( $xy \neq 0$  по условию). Не умаляя общности, будем считать  $x > 0$ ,  $y < 0$ . Сложив данные в условии неравенства, получим  $x + y < 0$ , т.е.  $0 < x < -y$ .



Следовательно,  $x^{2n} < y^{2n}$ . Но тогда  $0 > x^{2n} - y^{2n} > x$  – противоречие.

Н.Агаханов

**M2643.** Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются друг друга внутренним образом в точке  $A$  (рис.1). Проведем в большей окружности

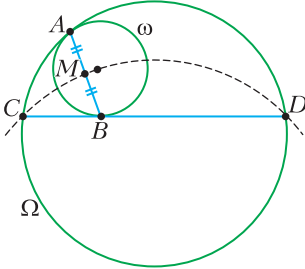


Рис. 1

$\Omega$  хорду  $CD$ , касающуюся  $\omega$  в точке  $A$  (хорда  $AB$  не является диаметром  $\omega$ ). Точка  $M$  – середина отрезка  $AB$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $CMD$ , проходит через центр  $\omega$ .

Обозначим через  $O$  центр окружности  $\omega$  (рис.2). Проведем через точку  $A$  общую

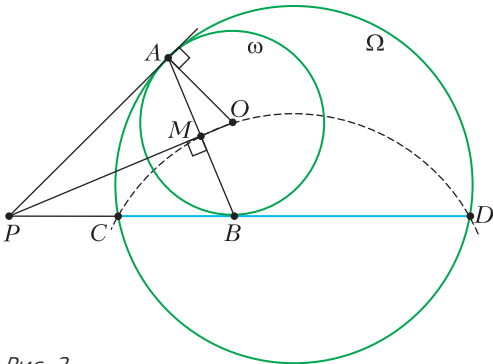


Рис. 2

касательную к нашим окружностям; пусть она пересекает прямую  $CD$  в точке  $P$ . Поскольку  $PA = PB$ , точка  $P$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ , который также проходит через точки  $M$  и  $O$ . Так как  $AM$  – высота в прямоугольном треугольнике  $PAO$ , имеем  $PM \cdot PO = PA^2$ . С другой стороны, по свойству касательной и секущей имеем  $PA^2 = PC \cdot PD$ . Значит,  $PM \cdot PO = PC \cdot PD$ . Это и означает, что точки  $C, D, O$  и  $M$  лежат на одной окружности.

П.Бибиков

**M2644.** Петя и Вася играют на доске  $100 \times 100$ . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

**Ответ:** выигрывает Петя.

Приведем одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он все время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски, назовем ее *главной*.

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали, после этого доска разбивается на две одинаковые «лесенки» (рис.1). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на полклетки относительно предыдущего ряда (рис.2).

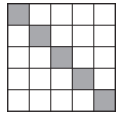


Рис. 1

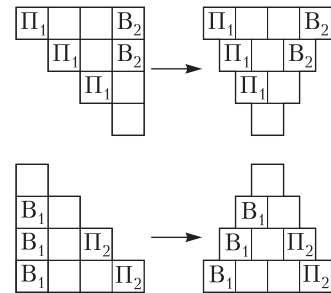


Рис. 2

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рисунке 2). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке будет оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сделать ход согласно опи-

санной стратегии. Так как игра закончится за конечное количество ходов, в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

М. Дидин

**M2645.** Витя записал в тетрадь  $n$  различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то  $n > 100$  случиться так, что  $\frac{n(n-1)}{2}$  чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

**Ответ:** нет.

Назовем набор из  $n$  чисел в тетради *красивым*, если из него получается требуемый набор наименьших общих кратных. Отметим, что в красивом наборе нет равных чисел, иначе среди выписанных НОКов тоже были бы равные, что противоречит условию.

Предположим, что красивый набор из  $n > 100$  чисел существует. Выберем из всех таких наборов набор с наименьшей суммой чисел.

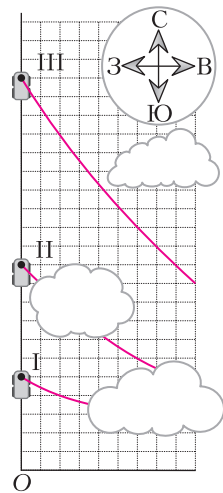
Заметим, что если разность полученной прогрессии  $d > 0$  имеет общий простой делитель  $p$  с каким-нибудь ее членом, то все члены этой прогрессии делятся на  $p$ , а тогда и все числа красивого набора, за исключением, быть может, одного, также делятся на  $p$ . Разделим все эти числа на  $p$  (кроме, возможно, того, которое не делится); все выписанные на доску числа тоже разделятся на  $p$  и по-прежнему будут последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии, т.е. также получится красивый набор. Это противоречит минимальности суммы чисел в выбранном наборе. Следовательно,  $d$  взаимно просто со всеми выписанными на доску числами.

Пусть  $a$  — максимальное число нашего красивого набора; тогда  $a \geq n$ . В прогрессии на доске будет не менее  $n - 1$  членов, кратных  $a$ . У каких-то двух из них номера отличаются не более чем на  $\frac{n(n-1)}{2} : (n-2) < n$ , т.е. разность этих чле-

нов (также делящаяся на  $a$ ) равна  $kd$  при некотором  $k \leq n - 1 < a$ . Но  $d$  взаимно просто с  $a$ , поэтому  $kd$  не может делиться на  $a$  — противоречие.

С. Берлов

**Ф2649.** На трех фотоснимках одного участка местности, сделанных с равными интервалами времени  $\tau$ , запечатлены разрушечный паровоз и фрагменты шлейфа дыма от него. Наложенные друг на друга фотографии приведены на рисунке. Зная, что, тронувшись с места, паровоз поехал на север с постоянным ускорением  $a = 0,4 \text{ м/с}^2$  и что в этот день дул западный ветер со скоростью  $u = 4 \text{ м/с}$ , найдите интервал времени  $\tau$  и расстояние от точки  $O$ , на которой находилась труба неподвижного паровоза. Цены делений шкал сетки по вертикали и горизонтали равны.



Пусть цена деления шкалы расстояний равна  $s$ . Далее возможны разные варианты рассуждений. Рассмотрим два из них.

*Вариант первый*

Обозначим скорость в конце первого участка  $v_1$ , в конце второго  $v_2$  и в конце третьего  $v_3$ . Так как снимки делались через равные промежутки времени  $\tau$ , то  $v_2 = v_1 + a\tau$ ,  $v_3 = v_1 + 2a\tau$ . Найдем средние скорости на втором и на третьем участке как среднее арифметическое скоростей в начале и в конце участка и как отношение пройденного пути ко времени:

$$v_{2\text{cp}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = v_1 + \frac{1}{2}a\tau = \frac{6s}{\tau},$$

$$v_{3\text{cp}} = \frac{v_2 + v_3}{2} = v_1 + \frac{3}{2}a\tau = \frac{10s}{\tau}.$$

Отсюда

$$a\tau = \frac{4s}{\tau}, \quad v_1 = \frac{4s}{\tau}, \quad v_1 = a\tau.$$

Это означает, что паровоз начал движение за  $\tau$  секунд до того, как был сделан первый снимок. Тогда путь, пройденный им на первом участке, равен

$$v_{\text{ср}}\tau = \frac{0 + v_1}{2}\tau = \frac{2s}{\tau}\tau = 2s.$$

Значит, паровоз начал движение из точки, расположенной на  $3s$  выше точки  $O$ .

Рассмотрим третий участок движения паровоза:

$$v_{\text{зср}} = v_1 + \frac{3}{2}a\tau = \frac{5}{2}a\tau = \frac{10s}{\tau}, \quad a\tau^2 = 4s.$$

Из рисунка видно, что, пока паровоз проезжал третий отрезок, дым, выпущенный в самом конце второго отрезка, сдвинулся на восток на расстояние  $8s = u\tau$ . Тогда

$$u\tau = 2a\tau^2, \quad \tau = \frac{u}{2a} = 5 \text{ с.}$$

Цена деления шкалы расстояний

$$s = \frac{a\tau^2}{4} = 2,5 \text{ м,}$$

следовательно, изначально паровоз находился на 7,5 метров севернее точки  $O$ .

*Второй вариант*

Пусть  $t_0$  – время движения паровоза от старта до момента выполнения первого снимка, а  $s_0$  – его начальное расстояние от точки  $O$ . Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} 5s &= s_0 + \frac{at_0^2}{2}, \\ 11s &= s_0 + \frac{a(t_0 + \tau)^2}{2}, \\ 21s &= s_0 + \frac{a(t_0 + 2\tau)^2}{2}. \end{aligned}$$

Вычтем из третьего уравнение второе, а из второго первое:

$$\begin{aligned} 10s &= \frac{a(t_0 + 2\tau)^2}{2} - \frac{a(t_0 + \tau)^2}{2}, \\ 6s &= \frac{a(t_0 + \tau)^2}{2} - \frac{at_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Поделим верхнее уравнение на нижнее:

$$\frac{5}{3} = \frac{(t_0 + 2\tau)^2 - (t_0 + \tau)^2}{(t_0 + \tau)^2 - t_0^2} = \frac{3\tau^2 + 2t_0\tau}{\tau^2 + 2t_0\tau}$$

и получим

$$t_0 = \tau, \quad 6s = \frac{3}{2}a\tau^2, \quad \text{или} \quad \frac{a\tau^2}{2} = 2s, \quad \text{и} \quad s_0 = 3s.$$

Значит, паровоз начал движение из точки, расположенной на  $3s$  выше точки  $O$ .

Рассмотрим третий отрезок движения паровоза:

$$\begin{aligned} 10s &= \frac{a(t_0 + 2\tau)^2}{2} - \frac{a(t_0 + \tau)^2}{2} = \frac{5}{2}a\tau^2, \\ &\text{или} \quad a\tau^2 = 4s. \end{aligned}$$

Из рисунка видно, что, пока паровоз проезжал третий отрезок, дым, выпущенный в самом конце второго отрезка, сдвинулся на восток на расстояние  $8s = u\tau$ . Тогда

$$u\tau = 2a\tau^2, \quad \tau = \frac{u}{2a} = 5 \text{ с,} \quad s = \frac{a\tau^2}{4} = 2,5 \text{ м.}$$

Следовательно, изначально паровоз находился на 7,5 метров севернее точки  $O$ .

*М.Замятнин*

**Ф2650.** В вертикальной плоскости находятся два невесомых стержня, соединенных шарниром массой  $M$  (рис.1). На свободном конце верхнего стержня закреплен груз массой  $m$ , а на свободном конце нижнего

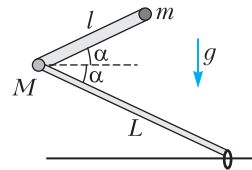


Рис. 1

стержня закреплено легкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закрепленной спице. Длина верхнего стержня  $l$ , длина нижнего стержня  $L > l$ . Изначально стержни составляют углы  $\alpha$  с горизонтом и удерживаются неподвижно. Затем их отпускают. Найдите:

- 1) ускорения шарнира  $a_{\text{ш0}}$  и грузика  $a_{\text{г0}}$  сразу после начала движения;
- 2) ускорение колечка  $a_{\text{к}}$  в момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.

Считайте, что стержни и спица тонкие и все тела могут пролетать мимо друг друга не соударяясь. Ускорение свободного падения  $g$ .

Рассмотрим нижний стержень. Так как он невесомый, то векторная сумма сил, дей-

ствующих на него, должна быть равна нулю. На стержень действует сила реакции опоры со стороны спицы, направленная вертикально вверх, и некоторая сила со стороны шарнира, которая должна быть направлена вертикально вниз. Если стержень легкий, то нулю также должна равняться и сумма моментов действующих на него сил. Вместе с предыдущим условием это означает, что сила реакции опоры со стороны спицы, как и сила, действующая на стержень со стороны шарнира, равны нулю.

Рассмотрим теперь верхний стержень вместе с шарниром и грузом. На него действуют две силы тяжести и сила со стороны нижнего стержня. Последняя по третьему закону Ньютона противоположна силе, с которой шарнир действует на нижний стержень, а она равна нулю. Тогда на верхний стержень, шарнир и груз действуют только силы тяжести, значит, они движутся вертикально вниз с постоянным ускорением

$$a_{ш0} = a_{г0} = g,$$

а стержень сохраняет ориентацию в пространстве.

Шарнир кольцо и груз окажутся на одной прямой, когда верхний стержень опустится ниже спицы и нижний стержень опять будет составлять угол  $\alpha$  с горизонтом. Запишем закон сохранения энергии и выразим скорость короткого стержня в этот момент времени. К этому времени он переместился по вертикали на расстояние  $\Delta h = 2L \sin \alpha$ , поэтому

$$\frac{(M + m)v^2}{2} = (M + m)g \cdot 2L \sin \alpha,$$

или  $v^2 = 4gL \sin \alpha$ .

Пусть  $u$  – скорость колечка в интересующий нас момент времени. Перейдем в систему отсчета, связанную с колечком. В ней шарнир движется по окружности радиусом  $L$ . Его скорость равна  $\vec{v}_{отн} = \vec{v} - \vec{u}$  и направлена перпендикулярно стержню, поэтому  $v_{отн} = v/\cos \alpha$ . Направим ось  $x$  так, как показано на рисунке 2, и найдем нормальную составляющую ускорения шарнира:

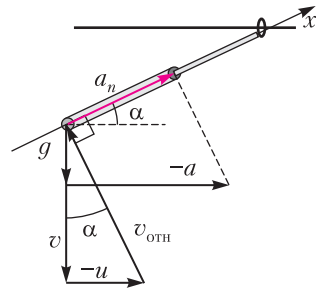


Рис. 2

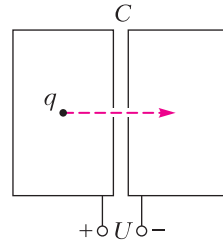
$$a_n = g_x - a_x = -g \sin \alpha + a_k \cos \alpha = \frac{v_{отн}^2}{L}.$$

Тогда

$$a_k = \frac{v_{отн}^2}{L \cos \alpha} + g \operatorname{tg} \alpha = g(5 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha.$$

А.Уймин

**Ф2651.** Две одинаковые проводящие оболочки в форме цилиндров с малыми отверстиями на общей оси образуют конденсатор емкостью  $C$  (см. рисунок). В центре



левой оболочки удерживают шарик с зарядом  $q$ . Суммарный заряд всей системы, включая заряд шарика, равен нулю. Конденсатор заряжают, подключив к источнику с напряжением  $U$ , затем отключают от источника и отпускают шарик. Шарик начинает двигаться вдоль оси  $u$ , пролетев через отверстия, попадает внутрь правой оболочки. Какую кинетическую энергию будет иметь шарик в центре правой оболочки? При каком заряде шарика эта энергия максимальна и чему она равна? Выделением тепла из-за тока в оболочках можно пренебречь. Поле тяжести не учитывайте.

Вначале на внутренней поверхности левой полости имеется экранирующий заряд  $-q$ , что дает ноль в сумме с зарядом шарика. На внутренней поверхности правой поло-

сти заряда нет. После подключения источника полный заряд системы остается равным нулю. Заряды на внешних поверхностях оболочек противоположны по знаку, а так как оболочки образуют конденсатор емкостью  $C$ , то эти заряды равны  $Q_0 = CU$  и  $-Q_0$ .

После перемещения шарика в центр правой оболочки к заряду  $Q_0 = CU$  левой оболочки добавится заряд  $-q$  с ее внутренней поверхности, а к заряду  $-Q_0$  правой оболочки добавится заряд  $q$  из-за ухода заряда  $-q$  на поверхность полости правой оболочки (для экранировки заряда шарика). Таким образом, заряды на внешних поверхностях станут равными  $Q$  и  $-Q$ , где  $Q = CU - q$ . Напряжение на конденсаторе при этом станет равным  $V = U - q/C$ . Ввиду такого же, как в левом цилиндре, расположения заряда  $q$  справа, энергия его взаимодействия с «экранирующими» зарядами на внутренней поверхности цилиндра не изменится. Изменяются только кинетическая энергия шарика и энергия конденсатора. Тогда, при отсутствии потерь энергии,

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{CV^2}{2} + K,$$

где  $K$  – кинетическая энергия шарика в центре правой оболочки, и

$$K = qU - \frac{q^2}{2C}.$$

Наибольшая кинетическая энергия отвечает случаю  $V = U - q/C = 0$ , тогда

$$q = CU, \text{ а } K = \frac{CU^2}{2}.$$

*И. Воробьев*

**Ф2652.** В вакууме в невесомости между круглыми полюсами электромагнита на расстоянии  $x$  от оси магнита покоится частица с массой  $m$  и зарядом  $q$  (рис. 1). Сначала магнитное поле равно нулю. Затем, за малый промежуток времени, индукция магнитного поля увеличивается до значения  $B_0$  и поддерживается постоянной в течение времени  $\tau < \pi m / (qB_0)$ , после чего очень быстро уменьшается до нуля.

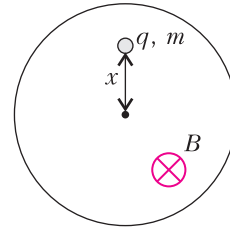


Рис. 1

- 1) Почему частица приходит в движение? Опишите качественно траекторию частицы.
- 2) С какой скоростью движется частица после включения магнитного поля?
- 3) С какой скоростью движется частица после выключения магнитного поля?
- 4) На каком минимальном расстоянии от оси магнита проходит траектория частицы?
- 5) Через какое время от момента включения поля частица окажется на минимальном расстоянии от оси магнита? Магнитное поле в пределах полюсов можно считать однородным. Перемещением частицы за время включения и выключения поля можно пренебречь.

При включении изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое, которое действует на частицу и сообщает ей некоторую скорость. Из соображений симметрии ясно, что силовые линии этого вихревого поля – концентрические окружности с центром на оси магнита. Согласно закону электромагнитной индукции, напряженность этого поля  $\vec{E}_{\text{вихр}}$  направлена (при указанном на рисунке 1 направлении магнитного поля) по часовой стрелке при включении поля и против нее – при выключении. Определим величину напряженности вихревого электрического поля  $E_{\text{вихр}}$  в месте расположения частицы. Величина ЭДС индукции  $\mathcal{E}$  в контуре радиусом  $x$  определяется скоростью изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \pi x^2 \frac{dB}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{E} = 2\pi x E_{\text{вихр}}.$$



Отсюда

$$E_{\text{вихр}} = \frac{x}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Поскольку  $m \frac{dv}{dt} = qE_{\text{вихр}}$ , за малый промежуток времени  $dt$  изменение скорости частицы

$$dv = \frac{qE_{\text{вихр}} dt}{m} = \frac{qxB}{2m} dt.$$

За все время установления постоянного значения  $B_0$  изменение скорости составит

$$v = \frac{qxB_0}{2m}.$$

Эта скорость сонаправлена с  $\vec{E}_{\text{вихр}}$ , т.е. направлена «по часовой стрелке» перпендикулярно радиусу, проведенному от оси полюсов электромагнита. Поэтому далее в течение времени  $\tau$  частица движется (под действием силы Лоренца) по окружности радиусом

$$R = \frac{vm}{qB_0} = \frac{x}{2}$$

с периодом обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB_0}.$$

Отметим, что окружность проходит через ось  $O$  полюсов электромагнита, а по условию  $\tau < \frac{\pi m}{qB_0} = \frac{T}{2}$ , т.е. до момента выключения магнитного поля частица успевает пролететь менее половины этой окружности. На рисунке 2:  $B$  – точка, в которой находилась частица в начальный момент времени,  $C$  – точка, в которой будет частица через время  $\tau$  в момент выключения поля,  $D$  – центр окружности, по которой движется частица. Положение частицы на

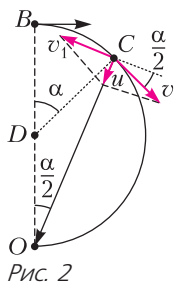


Рис. 2

окружности в момент времени  $\tau$  задается углом

$$\alpha = 2\pi \frac{\tau}{T} = \frac{\tau qB_0}{m},$$

а расстояние до оси  $O$  магнита при этом равно

$$x_1 = 2R \cos \frac{\alpha}{2} = x \cos \frac{\alpha}{2}.$$

При выключении магнитного поля из-за действия вихревого электрического поля скорость частицы изменится на величину

$$v_1 = \frac{qx_1 B_0}{2m} = v \cos \frac{\alpha}{2},$$

причем вектор  $\vec{v}_1$  направлен перпендикулярно отрезку  $OC$ , в то время как вектор  $\vec{v}$  перпендикулярен  $DC$ . После выключения поля результирующая скорость частицы

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}_1.$$

Нетрудно заметить, что составляющая вектора  $\vec{v}$ , перпендикулярная  $CO$ , равна по величине  $v_{\perp} = v \cos \frac{\alpha}{2}$ , т.е.  $\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_1 = 0$ . Значит, вектор  $\vec{u}$  направлен вдоль отрезка  $CO$ , проходящего через ось электромагнита. Вдоль этого отрезка и движется частица после выключения магнитного поля. Скорость  $u$  ее движения при этом равна

$$u = v \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{qx B_0}{2m} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, траектория  $BCO$  движения частицы представляет собой дугу окружности, переходящую в луч, идущий через ось магнита. Минимальное расстояние от оси магнита при любых значениях  $\tau$  и  $x$  равно нулю.

Время от момента включения поля до момента пролета частицы через центр магнита равно

$$\Delta t = \tau + \frac{x_1}{u} = \tau + \frac{x \cos \frac{\alpha}{2}}{\frac{qx B_0}{2m} \sin \frac{\alpha}{2}} = \tau + \frac{2m}{qB_0} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{где } \frac{\alpha}{2} = \tau \frac{qB_0}{2m}.$$

А.Аполонский

# Педальные отрезки: где максимум?

**М.ДИДИН, П.КОЖЕВНИКОВ**

Пусть на плоскости дан треугольник  $ABC$  и точка  $X$ . Проекции точки  $X$  на стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  обозначим соответственно  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ . Как известно, точки  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  будут лежать на одной прямой тогда и только тогда, когда  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$  (в таком случае прямая  $X_aX_bX_c$  называется *прямой Симсона*). Далее считаем, что  $X$  не лежит на окружности ( $ABC$ ), тогда проведем через точки  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  окружность – так называемую *педальную* окружность точки  $X$  (рис. 1). Вторые точки пересечения окружности  $X_aX_bX_c$  со сторонами треугольника обозначим  $Y_a$ ,  $Y_b$ ,  $Y_c$ . *Педальными отрезками* точки  $X$  назовем отрезки  $X_aY_a$ ,  $X_bY_b$ ,  $X_cY_c$ .

В этой небольшой статье мы изучим, какой из педальных отрезков будет макси-

мальным или минимальным по длине, в зависимости от положения точки  $X$ . По результатам этого небольшого исследования мы рассмотрим некоторые интересные частные случаи и дадим решение задачи М2621 из «Задачника «Кванта» (см. «Квант» №9 за 2020 г.). Авторское решение этой задачи опиралось на вычисление длин педальных отрезков.

Будем использовать следующий известный факт (см., например, статью П.Кожевникова «Изогонально сопряженные точки» в «Кванте» №1 за 2016 г.): перпендикуляры к прямым  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , проведенные в точках  $Y_a$ ,  $Y_b$ ,  $Y_c$  соответственно, всегда пересекутся в одной точке  $Y$ , *изогонально сопряженной* точке  $X$ , т.е. в точке  $Y$  такой, что прямые  $AX$  и  $AU$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BAC$ , прямые  $BX$  и  $BY$  симметричны относительно биссектрисы угла  $ABC$ , прямые  $CX$  и  $CY$  симметричны относительно биссектрисы угла  $ACB$ . Иначе говоря, точки  $X$  и  $Y$  в наших рассуждениях равноправны, они имеют общую педальную окружность. Точке  $Y$  мы также запретим лежать на окружности ( $ABC$ ) (в этом случае  $X$  не определена, или, как говорят, «ушла в бесконечность»), кроме случая, когда  $X$  лежит на одной из прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  – тогда педальная окружность точки  $X$  определена и проходит через вершину треугольника  $ABC$ , а  $Y$  совпадает с этой вершиной.

Основная идея будет в следующем. Мы найдем геометрическое место точек  $X$ , для которых найдутся два равных педальных отрезка, это ГМТ окажется объединением нескольких прямых и окружностей, которые разобьют плоскость на *области*. Далее позволим точке  $X$  непрерывно двигаться по плоскости, не пересекая «критической окружности» ( $ABC$ ); при этом длины педальных отрезков будут меняться непрерывно, а значит, пока  $X$  находится внутри одной из определенных выше областей, упорядоченность по длине педальных отрезков  $X_aY_a$ ,  $X_bY_b$ ,  $X_cY_c$  сохранится.

Далее проведем внутренние и внешние биссектрисы треугольника; пусть точки их

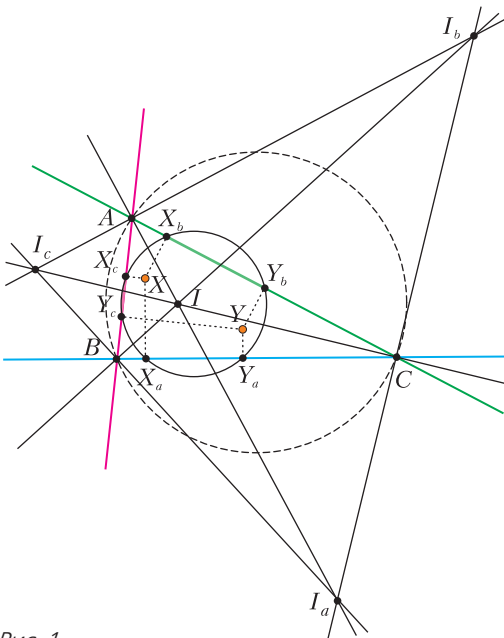


Рис. 1

пересечения  $I, I_a, I_b, I_c$  – центры вписанной и вневписанных окружностей. Отметим, что  $I, I_a, I_b, I_c$  – это в точности точки, совпадающие со своими изогонально сопряженными; можно сказать, что для этих точек длины всех педальных отрезков равны 0.

Будем рассматривать точки  $X$ , отличные от  $I, I_a, I_b, I_c$ , с условием  $X_bY_b = X_cY_c$ . Проекция  $X_bY_b$  и  $X_cY_c$  отрезка  $XU$  на прямые  $AC$  и  $AB$  равны по длине тогда и только тогда, когда  $XU$  составляет равные углы с прямыми  $AC$  и  $AB$ , т.е. когда отрезок  $XU$  параллелен либо внутренней, либо внешней биссектрисе угла  $BAC$ .

При этом если  $XU \parallel I_bI_c$ , то (острый) угол между прямыми  $XU$  и  $BC$  меньше, чем угол между прямыми  $XU$  и  $AC$  (или  $AB$ ), поэтому длина проекции отрезка  $XU$  на прямую  $BC$  больше длины проекции на прямую  $AB$  или  $AC$ , т.е.  $X_aY_a > X_bY_b = X_cY_c$ .

Если же  $XU \parallel I_a$ , то (острый) угол между прямыми  $XU$  и  $BC$  больше, чем угол между прямыми  $XU$  и  $AC$  (или  $AB$ ), значит, в этом случае  $X_aY_a < X_bY_b = X_cY_c$ .

**Лемма.** Пусть дан прямоугольный треугольник  $PQR$ ,  $\angle R = 90^\circ$ , и различные точки  $X$  и  $Y$ , симметричные относительно прямой  $PQ$ . Прямые  $RX$  и  $RY$  симметричны относительно прямой  $RP$  тогда и только тогда, когда  $X$  и  $Y$  лежат на окружности ( $PQR$ ).

**Доказательство.** Если  $X$  и  $Y$  лежат на окружности ( $PQR$ ) (т.е. окружности, построенной на  $PQ$  как на диаметре; рис.2), то дуги  $PX$  и  $PY$  равны, поэтому  $RP$  – биссектриса (внутренняя либо внешняя) угла  $XRY$ .

Пусть, наоборот,  $RP$  – биссектриса угла между прямыми  $RX$  и  $RY$ . Тогда  $RP$  пересекает серединный перпендикуляр  $QP$  к отрезку  $XU$  в серединах двух дуг  $XU$  окружности ( $RXY$ ). Но эти точки пересечения –  $P$  и  $Q$ , поэтому все пять точек  $R, P, Q, X, Y$  лежат на одной окружности. Лемма доказана.

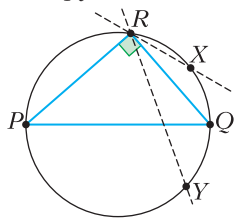


Рис. 2

Рассмотрим условие  $XU \parallel I_a$ . Это условие, очевидно, выполнено, когда  $X$  лежит на самой биссектрисе  $I_a$  угла  $A$ . Пусть далее  $X$  не лежит на прямой  $I_a$ . Тогда прямые  $AX$  и  $AU$  не совпадают и симметричны относительно биссектрисы (внешней и внутренней) угла  $A$ , а поскольку  $XU \parallel I_a$ , точки  $X$  и  $U$  должны быть симметричны относительно внешней биссектрисы  $I_bI_c$  угла  $A$ . Но тогда для точек  $X, U$  и прямоугольных треугольников  $I_bI_cB, I_bI_cC$  выполнены условия леммы, а значит,  $X$  и  $U$  лежат на окружности ( $I_bI_cBC$ ) (с диаметром  $I_bI_c$ ). Наоборот, если  $X$  и  $U$  лежат на этой окружности (и симметричны относительно  $I_bI_c$ ), то  $X$  и  $U$  изогонально сопряжены. Итак, мы получили такое утверждение.

**Утверждение 1.** Условие  $X_aY_a < X_bY_b = X_cY_c$  выполнено тогда и только тогда, когда  $X$  лежит на прямой  $I_a$  или на окружности ( $I_bI_cBC$ ).

### Диаграмма максимумов

Будем следить за максимальным из трех педальных отрезков. Проведем все три биссектрисы и окружности ( $I_bI_cBC$ ), ( $I_cI_aCA$ ), ( $I_aI_bAB$ ) (рис.3). Проведенные прямые и окружности разбивают плоскость на области. Оказывается (и сейчас мы это покажем), что максимум из трех педальных отрезков определяется цветом области, в которой лежит точка  $X$ : если  $X$  лежит в голубой области, то максималь-

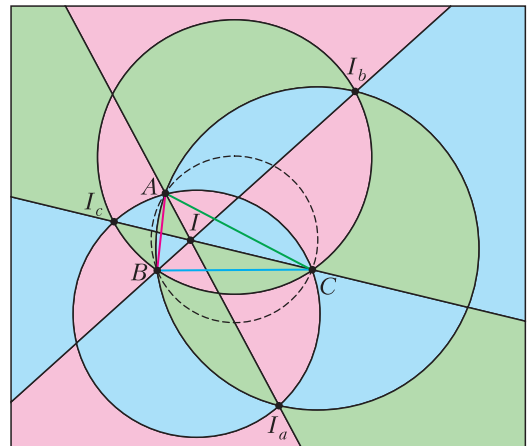


Рис. 3

ным является педальный отрезок  $X_aY_a$ , если в зеленой – то  $X_bY_b$ , а если в розовой – то  $X_cY_c$ .

Пусть для точек  $X$  из некоторой области максимальным педальным отрезком является  $X_bY_b$ . Будем непрерывно двигать точку  $X$ , не пересекая «критической» окружности  $(ABC)$ . Пусть  $X$  перешла из одной области в соседнюю (граничащую по отрезку или дуге) область; такой переход будем называть «катастрофой». Из утверждения 1 следует, что после катастрофы максимальным мог стать отрезок  $X_cY_c$  только в случае перехода точки  $X$  через прямую  $I_aI_b$  либо через окружность  $(I_bI_cBC)$ . После такого перехода проекция вектора  $\overline{XY}$  на внешнюю биссектрису меняет направление (покажите это!), поэтому действительно максимальный отрезок меняется с  $X_bY_b$  на  $X_cY_c$ .

Несложно определить цвет некоторых областей. Например, если  $X$  находится вблизи отрезка  $AI$  внутри треугольника, образованного прямыми  $AB, AI, CI$ , то  $Y$  находится вблизи прямой  $AI$  внутри треугольника, образованного прямыми  $BC, AI, CI$ ; в таком случае направление  $\overline{XY}$  близко к направлению  $\overline{AI}$ , но (острый) угол между  $\overline{XY}$  и  $\overline{AB}$  больше, чем (острый) угол между  $\overline{XY}$  и  $\overline{AC}$ , поэтому для таких точек  $X$  (и  $Y$ ) верно  $X_aY_a < X_cY_c < X_bY_b$  и соответствующие области на рисунке 3 (криволинейные треугольники, образованные прямыми  $AI, CI$  и одной из дуг окружности  $(I_aI_bAB)$  или  $(I_bI_cBC)$ ) должны быть зелеными. Далее цвет каждой из областей, лежащих внутри окружности  $(ABC)$ , можно определить, отслеживая катастрофы при переходе из одной области в соседнюю.

Пусть теперь  $X$  находится вне окружности  $(ABC)$ , скажем,  $X$  лежит в области, расположенной непосредственно над дугой  $AI_b$ . Тогда нетрудно видеть, что  $Y$  лежит внутри окружности  $(ABC)$  в области, про которую уже известно, что она зеленая. Значит, область, которой принадлежит  $X$ , тоже зеленая. Определить цвет других областей, лежащих вне окружности  $(ABC)$ , можно опять, отслеживая ката-

строфы. Таким образом получается раскраска на рисунке 3; по факту оказывается, что переход через критическую окружность  $(ABC)$  не меняет цвет области.

### Диаграмма минимумов

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, можно провести и для минимального педального отрезка. Аналогом утверждения 1 будет следующее.

**Утверждение 2.** Условие  $X_aY_a > X_bY_b = X_cY_c$  выполнено тогда и только тогда, когда  $X$  лежит на прямой  $I_bI_c$  или на окружности  $(I_aBC)$ .

За минимум отвечает принадлежность точки  $X$  какой-то области, на которые плоскость разбивают внешние биссектрисы и окружности  $(I_aBC), (I_bCA), (I_cAB)$  (рис. 4). Читатель может провести

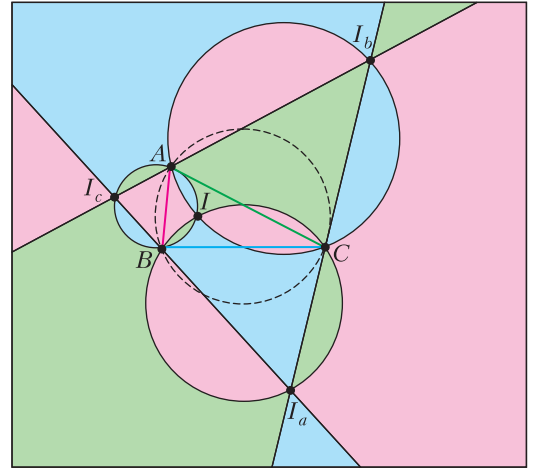


Рис. 4

рассуждения в подробностях и убедиться, что в качестве диаграммы минимумов получается раскраска на рисунке 4.

### Решение задачи M2621

M2621 (И. Вайнштейн). Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < BC < CA$ . Вне-вписанные окружности касаются сторон  $BC, CA, AB$  в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$  соответственно. Через точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  проведена окружность, которая вторично пересекает стороны  $BC, CA, AB$  в точках  $A_2, B_2$  и  $C_2$  соответственно. На какой из сторон треугольника может лежать наибольший из отрезков  $A_1A_2, B_1B_2$  и  $C_1C_2$ ?

Для решения этой задачи заметим, что перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника через точки касания с вневписанными окружностями, проходят через центры вневписанных окружностей, т.е. это перпендикуляры, проведенные через  $I_a, I_b, I_c$  к прямым  $BC, CA, AB$  соответственно. Иными словами, это перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника  $I_a I_b I_c$  на стороны его ортотреугольника. Как известно, они пересекаются в центре  $O'$  окружности  $(I_a I_b I_c)$ . Таким образом, окружность из условия задачи – это pedalная окружность точки  $X = O'$ .

Обратимся теперь к диаграмме максимумов (см. рис.3) и воспользуемся условием  $AB < BC < CA$ . Из  $AB < CA$  легко следует  $\angle I_a BC < \angle I_a CB, \angle B I_a I < \angle C I_a I$ , откуда получаем, что высота треугольника  $I_a BC$ , проведенная из  $I_a$ , находится внутри угла  $\Pi_a C$ . Аналогично, из  $AB < BC$  следует, что высота треугольника  $I_c AC$ , проведенная из  $I_c$ , находится внутри угла  $\Pi_b C$ ; а из  $BC < CA$  следует, что высота треугольника  $I_b BC$ , проведенная из  $I_b$ , находится внутри угла  $\Pi_c A$ . Значит, точка  $O'$  лежит внутри углов  $\Pi_a I_b, \Pi_b I_a$  и  $\Pi_c I_b$ , т.е. находится внутри треугольника  $\Pi_b C$ . Видим, что этот треугольник состоит из синей и красной областей, границей между которыми является дуга окружности  $(I_a I_c AC)$ . Если точка  $O'$  находится внутри этой окружности, т.е. в синей области, то  $\angle I_a O' I_c > 90^\circ$ , откуда  $\angle I_a I_b I_c > 45^\circ$ , что соответствует условию  $\angle ABC < 90^\circ$ , значит, при  $\angle ABC < 90^\circ$  максимальный pedalный отрезок – это  $X_b Y_b$ . При  $\angle ABC > 90^\circ$  точка  $O'$  лежит в красной области, значит, максимальный pedalный отрезок –  $X_c Y_c$ . При  $\angle ABC = 90^\circ$  имеем  $X_b Y_b = X_c Y_c > X_a Y_a$ .

Мы получили полный ответ, и вроде бы задача M2621 решена. Однако в формулировке задачи есть тонкость: обратим внимание, что в условии сказано, что данная pedalная окружность пересекает стороны (а не их продолжения). Во всех наших рассуждениях выше расположение проекций  $X_a, Y_a$  и т.д. никак не использовалось.

Оказывается, при  $\angle ABC \geq 90^\circ$  наша pedalная окружность точки  $O'$  содержит вершину  $B$  внутри себя, значит, в этом случае pedalные отрезки, лежащие на прямых  $AB$  и  $BC$ , не могут лежать на отрезках  $AB$  и  $BC$ . Докажем это.

Точка касания  $X_a = A_1$  такова, что

$$CX_a = \frac{AB + BC - AC}{2} < \frac{AB}{2},$$

поэтому  $A_1$  лежит на отрезке  $CA_0$ , где  $A_0$  – середина  $BC$  (рис.5). Аналогично, точка

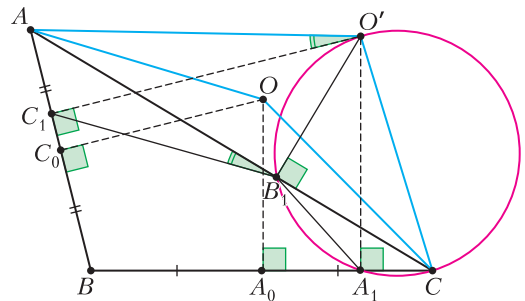


Рис. 5

$C_1$  отрезка  $AB$  лежит на отрезке  $AC_0$ , где  $C_0$  – середина  $AB$ . В силу условия  $\angle ABC \geq 90^\circ$ , точка  $O$  пересечения серединных перпендикуляров к  $AB$  и  $BC$  лежит по другую сторону от  $B$  относительно прямой  $AC$ , а значит, точка  $O'$  – тоже, при этом  $O$  лежит внутри треугольника  $AO'C$ . Заметим, что четырехугольник  $O'B_1 A_1 C$  – вписанный (в окружность с диаметром  $O'C$ ), откуда  $\angle A_1 B_1 C = \angle A_1 O' C = 90^\circ - \angle A_1 C O' < 90^\circ - \angle A_1 C O = \angle A_1 O C = \angle BAC$ . Аналогично,  $\angle C_1 B_1 A < \angle BCA$ .

Получаем, что  $\angle A_1 B_1 C_1 = 180^\circ - (\angle A_1 B_1 C + \angle C_1 B_1 A) > 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = \angle ABC$ . Тогда  $\angle A_1 B_1 C_1 + \angle A_1 B C_1 > 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Значит,  $B$  лежит вне окружности  $(A_1 B_1 C_1)$ , что мы и хотели доказать.

### Еще несколько фактов

В завершение приведем еще несколько задач, в которых сформулированы интересные факты для остроугольного треугольника  $ABC$  на ту же тему. Докажите их.

**1.** Как известно, окружность девяти точек является pedalной для ортоцентра  $H$



или центра описанной окружности  $O$ . Если средний угол треугольника меньше  $60^\circ$ , то наименьший из педальных отрезков для  $X = H$  лежит на наименьшей стороне, если же средний угол треугольника больше  $60^\circ$ , то – на наибольшей стороне.

2. Пусть  $r$  – радиус вписанной окружности,  $r_b$  – радиус внеписанной окружности, касающейся средней стороны,  $R$  – радиус описанной окружности. Тогда наименьший из педальных отрезков задачи M2621 (хорд окружности Нагеля) лежит на меньшей стороне если и только если  $2R < r + r_b$ .

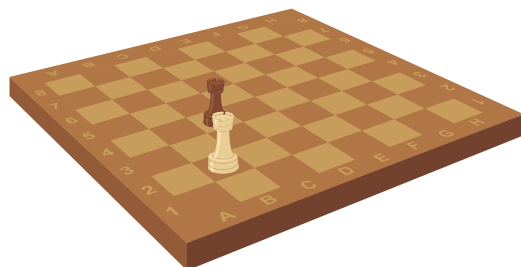
3. Наибольшая из хорд педальной окружности точки Торричелли лежит на средней стороне треугольника.

4. Наименьшая из хорд педальной окружности точки Торричелли лежит на меньшей стороне, если средний угол треугольника больше  $60^\circ$ , и на большей стороне – в противном случае.

Можно продолжить исследование для других замечательных точек треугольника, а также для случая тупоугольного треугольника.

## Скрытая симметрия

**Е. БАКАЕВ**



В этом номере приводится решение задачи M2644. Красота этой задачи в том, что, несмотря на совершенно разные правила хода для двух игроков, оказывается, можно взглянуть на ситуацию под таким углом, что в качестве стратегии работает симметрия непосредственно в геометрическом смысле!

Мы приведем еще три игры с похожей «изюминкой». В задачах 1 и 2 игроки ходят по одинаковым правилам, но все же положение фигур на доске симметрией не обладает – предлагаем подумать, как этой симметрии достичь. В задаче 3 и вовсе игроки ходят совершенно по-разному, даже никакого расположения предметов не задается, но и там, тем не менее, разглядев скрытую симметрию, вы решите задачу.

1 (А.Толпыго). Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски  $8 \times 8$ , а черная – на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из

игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

2 (А. Бучин, А. Иванищук). Двое игроков по очереди выставляют на доску  $65 \times 65$  по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

3 (Е.Бакаев). Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берет 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

# Задачи

1. Из кубиков Алиса построила игрушечный город. На рисунке показан

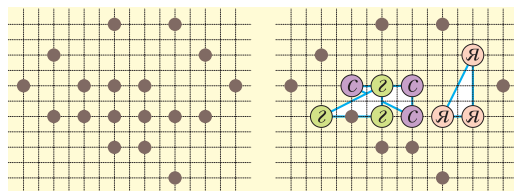


вид на этот город сверху и с одной из сторон. Какое наибольшее количество кубиков могла использовать Алиса?

2. Внутри квадрата поместили три маленьких квадрата. Какова длина отрезка, обозначенного  $x$ ?



3. Царь пообещал награду тому, кто сможет на каменистом пустыре посадить красивый фруктовый сад. Об этом узнали два брата. Старший смог выкопать 18 ям (см. рис. слева). Больше нигде не удалось, только все лопаты сломал. Царь рассердился и посадил его в темницу. Тогда младший брат Иван предложил разместить яблони, груши и сливы в вершинах равных треугольников (см. рис. справа), а остальные ямы засыпать. Царь ответил так:



— Хорошо, если деревьев каждого вида будет ровно по три, и они будут расти в вершинах равных треугольников, выйдет красиво. Но три вида — слишком мало. Если кроме яблонь, груш и слив будут еще и абрикосы — отпущу брата. Если добавишь пятый вид — черешню — заплачу за работу. Мне еще миндаль нравится, но шесть треугольников тут не сможешь разместить.

— А если смогу?

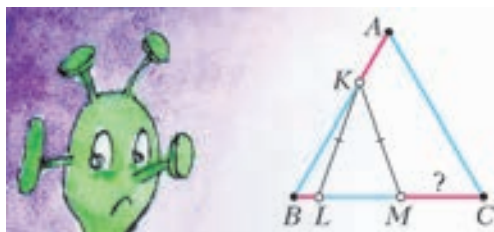
— Тогда проси чего хочешь!

Иван задумался, не получить ли заодно и полцарства. Подумайте и вы: разместите как можно больше видов деревьев в вершинах равных треугольников. (Равенство треугольников означает равенство всех его сторон и углов, т.е. точное совпадение при наложении; треугольники можно поворачивать и переворачивать. В одной яме может расти только одно дерево.)

*Е.Бакаев*

4. Дан правильный треугольник  $ABC$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $K$ , на стороне  $BC$  — точки  $L$  и  $M$  ( $L$  лежит на отрезке  $BM$ ) так, что  $KL = KM$ ,  $BL = 2$ ,  $AK = 3$ . Найдите  $CM$ .

*Е.Бакаев*



Задачи 1 и 2 предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру», задачи 3 и 4 — на Математическом празднике.

# Перечитывая фантастов

*С. ПАРНОВСКИЙ*

Комиксы и созданные на их основе фильмы со спецэффектами полны героями со сверхспособностями разного рода. Чуть реже их можно найти в книгах в жанре фэнтези. А есть ли они в классической научной фантастике? Почему именно классической, спросите вы. Да просто потому, что на ранних этапах развития жанра считалось, что автор должен дать объяснение сверхспособностям своего героя, хоть как-то похожее на разумное. В ход шли чудесные изобретения, тайно созданные непризнанными гениями машины, некие эликсиры или лекарства, новые материалы (желательно – неизвестный науке металл неземного происхождения) и так далее.

Классика жанра – это человек-невидимка Герберта Уэллса, ставший таким благодаря своему научному открытию. И практически с самого момента появления книги об этом супергерое она стало объектом научного разбора и насмешек. Действительно, свет, попадая на какой-то предмет, может поглощаться, отражаться, рассеиваться, преломляться. Именно это и делает видимым этот предмет. Молодой ученый Гриффин придумал способ устранить все эти явления и

применил его к своему телу. И что в результате? Весь свет, попавший ему в глаза, спокойно проходил сквозь них, не взаимодействуя с палочками и колбочками – светочувствительными приемниками на сетчатке его глаз. Так что пресловутый человек-невидимка Гриффин сам не должен был видеть ничего вокруг. Причем не только людей, но и окружающий мир. Остается пожалеть бедного слепца.

Впрочем, если дать волю фантазии, то можно придумать способ обойти эту проблему. Простейший – разрешить сетчатке поглощать свет. Но этого мало, придется сделать видимым и хрусталик глаза, ведь если его показатель преломления сравняется, как у Уэллса, с показателем преломления воздуха, то хрусталик перестанет фокусировать свет на сетчатку и от ее видимости проку будет немного.

Можно пойти дальше и представить сложное устройство, которое делит попадающий на него свет, скажем, пополам. Одна половина идет в глаза наблюдателю или на другое светочувствительное устройство, а вторая половина усиливается вдвое и продолжает свой путь, обеспечивая невидимость. Понятно, что про половины написано просто для примера. Важно, что свет, попадающий на устройство, анализируется и поглощенная его часть подменяется светом, испущенным специальным излучателем. Излученный свет должен заменять поглощенный, причем как по интенсивности, так и по направлению и спектру. Управляться все это должно, скорее всего, с помощью компьютера.

В советской научной фантастике можно найти другого супергероя, ставшего таковым в результате научного открытия, причем не одного, а множества различных. Это – профессор Вагнер, герой многих рассказов Александра Беляева. Открываем изданный в 1926 году рассказ «Гость из книжного шкафа» из серии «Изобретения профессора Вагнера» и читаем:

«Но профессор Вагнер не спит. Он не спит уже много



лет – с тех пор, как победил сон. Его жизнь – один непрерывный рабочий день. И выполняет он две работы сразу. Каждое его мозговое полушарие, как два самостоятельных веретена, ткёт сразу две нити мыслей.

Одна из них – о строении атома. Вот над чем работает сейчас профессор Вагнер.

А другой половиной мозга – что с ним бывает очень редко – он думает о самом себе. Он подводит итог тем событиям, которые вновь сделали его пленником.

Победа над сном дорого ему досталась. Тайная немецкая политическая организация “Диктатор”, желавшая воспользоваться его изобретением, путем обмана заманила его в свои сети. Профессор Вагнер бежал на самолете. Но когда спасение, казалось, уже пришло, когда он уже видел развевающийся вдали, на русской границе, красный флаг, случилось то, чего он менее всего ожидал. Его настигла неожиданная погоня».

Сразу видно, что перед нами коллега Супермена. И можно предугадать, что профессор даст прикурить обществу «Диктатор» и его приспешникам:

«Прошло три месяца с тех пор, как Вагнер вернулся в свое заключение после неудачного побега. ...И вот только теперь, в эту бурную, дождливую ночь, он сделал одно открытие, которое должно было раскрыть перед ним все двери, сделать его свободным – свободным, как ни один человек на Земле. “Сказано – сделано!” И он вдруг направился по комнате напрямик, через столы и кресла, и проходил сквозь них, как через воздух. ...И вдруг Вагнер, к ужасу зрителей, почти терявших сознание, вошел в пылающий камин, весело кивнул им последний раз, стоя среди пламени, и исчез в каминной стене».

Проходя через предметы и людей, профессор неспешно путешествовал по Германии, пугая своим видом обывателей. Но враги полны коварства:

«Видите ли, в чем дело: профессор Вагнер неуловим и неуязвим. Но и у него должна быть ахиллесова пята. Да, ахиллесова именно пята, можно сказать не только иносказательно, но и почти буквально.

Если бы все тело, говорит профессор Шмидт, было пронцаемо для материи, то ясно, что Вагнер должен был провалиться сквозь землю...

– Вот-вот! В этом все дело! Если земля не расступилась под его ногами, значит, его подошвы снабжены особыми изоляторами что ли. Эти изоляторы должны быть иного строения атомов, чем его тело. Каким образом эти изоляторы, или сандалии, все же проникают сквозь стены, Шмидт не уяснил. Он допускает, что впереди или по краям они снабжены оболочкой, которая способна изменить атомный состав материи, встречающейся на пути, и делать ее пронцаемой. Но самые сандалии, или калоши, назовите как хотите, должны быть материальными. В этом все дело...

– Ну и?..

– Ну и очень просто: нужно ловить его за эти калоши! Окружить и хватать сквозь ноги подошвы! Тогда он будет в наших руках! Поймав калоши, мы поймаем и Вагнера!»

Но они, естественно, просчитались. Послушаем рассказ самого профессора:

«Они, мои преследователи, думают, что я должен иметь особые изоляторы на подошвах, чтобы не провалиться сквозь землю. Только сейчас, перед тем как мне укрыться у вас, они сделали нападение на меня, вернее на мои ноги. Они хватали меня за подошвы у земли. Но я вошел по колени в землю. С таким же успехом я мог бы войти по голову, и тогда они увидали бы одну голову,двигающуюся по земле. Но у меня нет никаких “подошв”. Они ошиблись. Законы тяжести не существуют для меня. И я благополучно ушел от них».

Самое время прервать чтение и задуматься, как все должно выглядеть с точки зрения физики. Сформулируем задачу: есть тело, в нашем случае это тело профессора Вагнера, на которое не действуют никакие силы. Ни гравитация, ни реакция опоры, ни механические силы при взаимодействии с соприкасающимися с ним предметами. Согласно первому закону Ньютона это тело будет двигаться с постоянной скоростью. Неужели профессор Вагнер вместо того, чтобы не спеша идти в сторону

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

СССР, будет беспомощно барахтаться на одном месте, пытаясь добыть глоток воздуха, который проходит сквозь него не задерживаясь? Про еду и воду я даже не вспоминаю. Ответ: все немного сложнее.

Тело профессора Вагнера в обычном состоянии притягивается не только к Земле, но и к Солнцу, Луне, центру Галактики, скоплениям и сверхскоплениям галактик. И если профессор в некий момент одновременно сделает свое тело пронизываемым и не притягиваемым к другим телам, то оно действительно будет двигаться равномерно и прямолинейно, но не в системе отсчета, связанной с Землей или немецким замком, в котором держали профессора, а относительно некой не совсем понятной «инерциальной системы отсчета». Замок вращается вокруг оси Земли за сутки, Земля возвращается вокруг центра масс системы Земля–Луна за месяц, она же вокруг Солнца – за год. Траектория замка в этой самой инерциальной системе отсчета будет существенно отличаться от прямой.

С точки зрения тех, кто наблюдал исчезновение профессора в камине, картина должна выглядеть так: профессор облучает себя таинственными лучами, после чего начинает задыхаться, барахтаясь в воздухе, и поднимается все выше и выше с увеличивающейся скоростью. Если он при этом пытается что-то произнести, то его все равно невозможно услышать – ведь его горло, легкие, голосовые связки и все остальное спокойно проходят сквозь воздух, не приводя его в колебательное движение, т.е. не вызывая звуковые волны. Наверное, в прочие детали можно не вдаваться.

Но в заключение предлагается читателям самостоятельно разобраться в еще одном коронном трюке из арсенала фантастики – в путешествиях во времени. Не спрашивается, как это можно устроить, а спрашивается, куда именно попадет путешественник во времени, переместившись вперед или назад вдоль этого самого времени, но оказавшись, по мнению фантастов, «в том же самом месте». И траектория движения суперпрофессора Вагнера поможет вам в размышлениях над этим вопросом.

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

### ИТОГИ КОНКУРСА ИМЕНИ А. П. САВИНА 2020/21 УЧЕБНОГО ГОДА

#### Победители

Лучшие результаты показали

*Бирюлин Алексей* – Москва, школа 179, 8 кл.,

*Дренчева Мария* – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 9 кл.,  
*Нестеренко Александра* – Москва, школа 1287, 8 кл.,

*Часовских Иван* – Химки, Московская обл., школа 14, 7 кл.

#### Призеры

Также высокие результаты показали команда МАОУ «Академический Лицей» города Магнитогорска (руководитель Мошкин Виталий Станиславович):

Чернов Богдан (10 кл.), Казакова Екатерина (9 кл.), Гофштейн Лев (9 кл.), Королев Михаил (10 кл.),

*совместная математическая группа Центра «Успех» Гатчинского муниципального района и Информационно-методического центра Лужского муниципального района Ленинградской области* (руководитель Павлов Сергей Павлович):

Стрекозов Денис (5 кл.), Дорохова Софья (7 кл.), Крылов Тимофей (7 кл.), Маркин Иван (8 кл.), Тюков Даниил (10 кл.), Еронин Валерий (10 кл.).

#### Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант» и призы от МЦНМО. Помимо этого призы получают также наиболее активные участники конкурса.



# Задача о шаре в треугольной призме

Г.ШАРЫГИН

Эта статья родилась из обсуждения со школьниками 2007 московской школы следующей олимпиадной задачи (автор задачи И. Богданов).

**Задача 1.** В треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписан шар, касающийся боковых граней  $BCC_1B_1$ ,  $CAA_1C_1$  и  $ABB_1A_1$  в точках  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  соответственно. При этом  $\angle A_0BB_1 = \angle B_0CC_1 = \angle C_0AA_1$  (рис. 1).

а) Чему могут равняться эти углы?

б) Докажите, что отрезки  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$  пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что проекции центра сферы на прямые  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  образуют правильный треугольник.

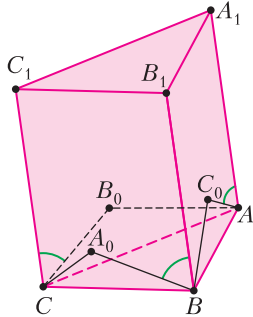


Рис. 1

Задачу эту несложно решить геометрически; хотя она и не является главным содержанием статьи, мы приведем для полноты картины ее решение.

**Решение.** а) Напомним, что длины касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны, поэтому  $AB_0 = AC_0$ ,  $BA_0 = BC_0$ ,  $CA_0 = CB_0$ . Кроме того, по этой же причине (и по теореме о трех перпендикулярах) получаем, что равны перпендикуляры, опущенные из  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  на соответствующие боковые ребра призмы. Поэтому

$$\begin{aligned} \angle C_0AA_1 &= \angle B_0AA_1, \quad \angle A_0BB_1 = \angle C_0BB_1, \\ \angle B_0CC_1 &= \angle A_0CC_1. \end{aligned}$$

В силу условия, все эти шесть углов оказываются равными; пусть  $\varphi$  – их величина. Так как сумма углов при стороне  $AB$  параллело-

грамма  $AA_1B_1B$  равна  $180^\circ$ , как и сумма углов треугольника  $C_0AB$ , мы видим, что

$$\angle AC_0B = \angle C_0AA_1 + \angle C_0BB_1 = 2\varphi.$$

И, аналогично,  $\angle BA_0C = \angle CA_0B = 2\varphi$ . Пусть  $T$  – точка касания вписанного шара с основанием  $ABC$  данной призмы. Тогда по той же причине попарно равны треугольники  $A_0BC$  и  $TBC$ ,  $B_0AC$  и  $TAC$ ,  $C_0AB$  и  $TAB$ . Поэтому сумма углов  $\angle AC_0B + \angle BA_0C + \angle CA_0B = 6\varphi$  равна сумме углов  $\angle ATB + \angle BTC + \angle CTA = 360^\circ$ , откуда,  $\varphi = 60^\circ$ . Отметим, что точка  $T$  оказывается при этом точкой Торричелли, т.е. углы  $ATB$ ,  $BTC$ ,  $CTA$  равны по  $120^\circ$ .

б) Докажем, что отрезки  $AA_0$  и  $BB_0$  пересекаются в одной точке. В самом деле, если продлить отрезки  $AB_0$  и  $BA_0$  до пересечения с  $CC_1$ , то в силу доказанного получим, что треугольники, образуемые прямой  $CC_1$ , проведенными прямыми и отрезками  $CA_0$ ,  $CB_0$ , правильные. Так как  $CA_0 = CB_0$ , мы видим, что эти треугольники равны, и, следовательно, прямые  $AB_0$ ,  $BA_0$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Значит, точки  $A$ ,  $A_0$ ,  $B$  и  $B_0$  лежат в одной плоскости, поэтому отрезки  $AA_0$  и  $BB_0$  пересекаются. Аналогично докажем, что отрезки  $AA_0$  и  $CC_0$  тоже пересекаются, как и отрезки  $BB_0$  и  $CC_0$ . Поскольку точки  $A$ ,  $A_0$ ,  $B$ ,  $B_0$ ,  $C$  и  $C_0$  не лежат в одной плоскости, мы заключаем, что отрезки  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$  пересекаются в одной точке.

в) Заметим, что по тем же причинам, что и раньше, треугольники  $AA_1B_0$  и  $AA_1C_0$  равны. Так как к тому же  $AA_1C_1C$  и  $AA_1B_1B$  – параллелограммы, получаем равенство

$$\begin{aligned} \angle B_0AC + \angle B_0A_1C_1 &= \angle AB_0A_1 = \\ &= \angle AC_0A_1 = \angle C_0AB + \angle C_0A_1B_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, сумма углов  $\angle B_0AC + \angle C_0AB$  равна углу  $\angle BAC$  основания призмы, а сумма углов  $\angle B_0A_1C_1 + \angle C_0A_1B_1$  равна  $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ . Поэтому

$$\angle B_0AC = \angle C_0A_1B_1, \quad \angle C_0AB = \angle B_0A_1C_1.$$

Если  $S$  – точка касания вписанного шара с «верхним» основанием призмы, то в силу равенства треугольников  $SA_1C_1$  и  $B_0A_1C_1$ , и аналогично для нижнего основания, получаем:

$$\angle SA_1C_1 = \angle B_0A_1C_1 = \angle C_0AB = \angle TAB.$$

По сходным причинам  $\angle SA_1B_1 = \angle TAC$ . Точно так же,  $\angle SB_1C_1 = \angle TBA$ ,  $\angle SB_1A_1 = \angle TBC$ ,  $\angle SC_1A_1 = \angle TCB$ ,  $\angle SC_1B_1 = \angle TCA$ .

Рассмотрим верхнее основание призмы; для удобства мы нарисовали на нем образ  $T_1$  точки  $T$ , получающийся при отождествлении верхнего и нижнего оснований. Пусть  $P, Q, R$  – основания перпендикуляров, опущенных из  $S$  на стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  (рис.2). Тогда, согласно известному призна-

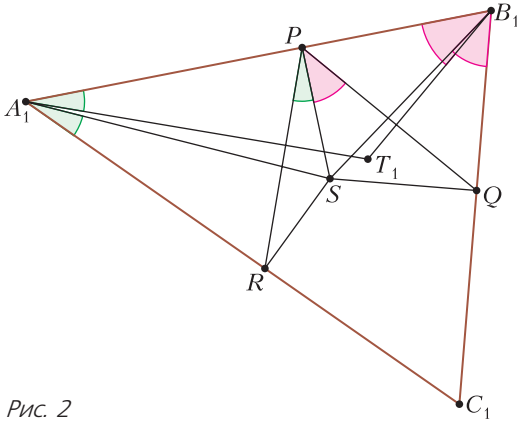


Рис. 2

ку, четырехугольники  $A_1PSR$ ,  $B_1PSQ$ ,  $C_1RSQ$  можно вписать в окружности, а следовательно,  $\angle SPR = \angle SA_1R$ ,  $\angle SPQ = \angle SB_1Q$ . Значит, по доказанному,

$$\begin{aligned} \angle RPQ &= \angle SPR + \angle SPQ = \angle SA_1R + \angle SB_1Q = \\ &= \angle T_1A_1B_1 + \angle T_1B_1A_1 = 60^\circ, \end{aligned}$$

так как  $\angle A_1T_1B_1 = \angle ATB = 120^\circ$ . Очевидно, точно такие же рассуждения применимы к остальным углам треугольника  $PQR$ , значит, он правильный. Осталось заметить, что по теореме о трех перпендикулярах точки  $P, Q, R$  являются проекциями центра сферы на прямые  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и  $C_1A_1$  соответственно.

На этом заканчивается решение задачи; мы привели его полностью, потому что по ходу этого рассуждения нам удалось доказать несколько замечательных фактов, которые мы будем сейчас исследовать.

Напомним, что две точки  $P$  и  $P'$  внутри<sup>1</sup> треугольника  $ABC$  называются *изогонально сопряженными* друг другу, если

$$\angle PAB = \angle P'AC, \angle PBC = \angle P'BA,$$

<sup>1</sup> На самом деле это требование не является обязательным; однако нам для наших целей достаточно рассматривать только такие точки.

$$\angle PCA = \angle P'CB.$$

Из этого определения, конечно, не следует, что изогонально сопряженная точка существует для любой точки внутри  $ABC$ . Этот факт обычно доказывают при помощи так называемой теоремы Чевы «в синусах» (хотя есть много других доказательств; см. например, статью П.Кожевникова «Иzegoнально сопряженные точки» в «Кванте» №1 за 2016 г.).

Но, кажется, мы близки к доказательству существования изогонально сопряженной точки, не используя тригонометрии, а при помощи... стереометрии! В самом деле, из приведенного решения задачи 1 следует такое общее утверждение.

**Утверждение 1.** *Если сфера, вписанная в треугольную призму, касается нижнего основания в некоторой точке  $P$ , то верхнего основания она будет касаться в изогонально сопряженной с ней точке.*

Действительно, при решении части в) задачи 1 мы только в самом конце воспользовались тем, что касание треугольника  $ABC$  происходит в специальной точке (точке Торричелли). Общее утверждение 1 про изогональное сопряжение точек касания верхнего и нижнего оснований призмы от этого факта совсем не зависит!

Кстати, для точки Торричелли изогонально сопряженной является так называемая точка Аполлония, которую можно определить как точку, проекции которой на прямые, содержащие стороны треугольника, являются вершинами правильного треугольника. Конечно, это согласуется с частью в) задачи 1.

Приведем также интересную переформулировку утверждения 1.

**Утверждение 1'.** *Пусть дана (бесконечная) треугольная призма и плоскость, пересекающая призму по треугольнику  $ABC$ . В призму вписаны две (равные) сферы, касающиеся плоскости  $ABC$  в точках  $P$  и  $P'$ . Тогда  $P$  и  $P'$  – изогонально сопряженные точки треугольника  $ABC$ .<sup>2</sup>*

<sup>2</sup> В качестве упражнения читатель может показать эквивалентность утверждений 1 и 1'. Утверждение 1' можно доказать независимо разными способами. Одна из идей – вписать в призму круговой цилиндр (он будет описанным вокруг сфер) и свести вопрос к известной конфигурации сфер Данделена и эллипса – сечения цилиндра, касающегося обеих сфер.

Чего же нам не хватает, чтобы завершить доказательство существования изогонально сопряженной точки (для любой точки внутри треугольника  $ABC$ ) стереометрически? Самую малость: мы пока не знаем, существует ли призма, в которую можно вписать шар так, чтобы он касался нижнего основания в любой наперед данной точке треугольника. Итак, вот новая задача.

**Задача 2.** Докажите, что для любой точки  $P$  внутри данного треугольника  $ABC$  найдется призма с основанием  $ABC$ , в которую можно вписать шар так, что при этом  $P$  будет точкой его касания с треугольником  $ABC$ .

Как ни странно, но доказать существование такой призмы несложно, если воспользоваться так называемым «принципом промежуточного значения»: если некоторая функция  $f$  непрерывна, при  $x = a$  ее значение отрицательно, а при  $x = b$  — положительно, то в какой-то точке  $c$  между  $a$  и  $b$  окажется, что  $f(c) = 0$ . Это утверждение весьма универсально и применяется во многих задачах. Посмотрим, как оно сработает здесь.

**Решение.** Рассмотрим всевозможные сферы, касающиеся плоскости треугольника  $ABC$  в точке  $P$  и лежащие по одну сторону от этой плоскости. Для каждой такой сферы мы можем построить плоскости, касающиеся ее и проходящие через прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ . Очевидно, что при маленьких значениях радиуса сферы точка пересечения этих плоскостей будет лежать по ту же сторону от плоскости треугольника, что и сфера. Однако, когда радиус станет достаточно большим, точка пересечения окажется с другой стороны. Значит, согласно вышеуказанному принципу, в какой-то момент эта точка исчезнет вовсе, т.е. эти плоскости будут образовывать боковую поверхность призмы с основанием  $ABC$ , в которую будет вписана данная сфера. Осталось провести верхнее основание так, чтобы оно касалось той же сферы.

Можно, конечно, спросить, что играет роль функции  $f$  в приведенном нами рассуждении. На самом деле, таких функций много; например, можно взять в качестве  $f$  разность между  $180^\circ$  и суммой плоских углов, образованных стороной  $AB$  треугольника и прямыми, по которым пересекаются плоскости,

проведенные через стороны треугольника; конечно, мы рассматриваем только углы при вершинах  $A$  и  $B$  и только углы, лежащие по одну сторону от плоскости  $ABC$ . Равенство нулю этой разности гарантирует, что прямые параллельны, а значит, проведенные плоскости образуют поверхность призмы.

Итак, задача 2 решена, тем самым, мы доказали существование изогонально-сопряженной точки для любой точки в треугольнике.

Приведенное нами рассуждение всем хорошо, однако никакой информации о сфере, кроме того, что она существует, мы из него не получили и получить, по-видимому, не сможем. Конечно, по существу, положение сферы в нашем случае определяется только ее радиусом, раз уж мы знаем ее точку касания с треугольником  $ABC$ . Поэтому можно так сформулировать новую задачу.

**Задача 3.** Найдите радиус сферы, вписанной в призму, если эта сфера касается основания призмы — данного треугольника  $ABC$  — в данной точке  $P$ .

Понятно, что выражать радиус сферы мы должны через величины, связанные с треугольником и с точкой  $P$ . Также ясно, что, когда нам дан треугольник, мы можем пользоваться его длинами сторон, величинами углов и т.п. Но что значит «данная точка внутри треугольника»? Чем определяется такая точка? Конечно, нам бы хотелось, чтобы наш способ задавать точку был связан с треугольником, иначе будет трудно связать друг с другом два условия задачи — треугольник и точку.

Способов описать положение точки внутри треугольника так, чтобы было выполнено оговоренное выше условие, много. Можно, например, выразить вектор  $\overline{AP}$  через векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  и использовать коэффициенты этого разложения для определения положения точки. Правда, при этом вершины треугольника будут не совсем равноправны — точка  $A$ , очевидно, будет играть существенно иную роль, чем  $B$  и  $C$ .

Если действовать более геометрически, можно провести лучи через вершины треугольника и точку  $P$ . Тогда положение точки  $P$  будет определяться положением проведенных лучей, которые, в свою очередь, надо

как-то определить: или при помощи фиксации точек их пересечения с противоположными сторонами треугольника, или при помощи указания углов, которые они образуют со сторонами треугольника. Такие определения лучше, так как все три луча играют примерно одинаковую роль; правда, выбирать лучи мы можем не совсем свободно – теорема Чевы (и обычная, и «в синусах») показывает, что произведение отношений отрезков, на которые проведенные лучи делят противоположные стороны (или отношения синусов углов, на которые углы треугольника делятся проведенными лучами), равно 1. Хотя, конечно, все приведенные методы задания точки в треугольнике взаимно эквивалентны – всегда можно вычислить одни данные, если известны другие, – но все равно, задавать точку набором из трех чисел такого рода гораздо удобнее, если мы хотим изучать геометрию треугольника.

Правда, такого рода троек чисел можно указать довольно много: помимо отношений отрезков или синусов углов, можно брать площади треугольников  $ABP$ ,  $BSP$ ,  $CAP$  или, скажем, длины отрезков  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  и тому подобное. Нам для наших целей будет удобно использовать в качестве «координат» точки  $P$  ее расстояния до сторон треугольника:  $PQ = u$ ,  $PR = v$ ,  $PS = w$  (рис.3). Кстати,

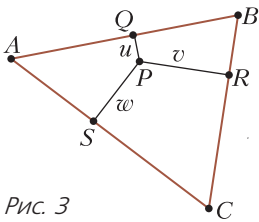


Рис. 3

кавычки в данном случае не очень нужны: введенная тройка  $(u, v, w)$ , рассматриваемая с точностью до умножения на константу, в математической литературе часто называются *трилинейными координатами*.

Уточним теперь формулировку задачи.

**Задача 3'.** Пусть в данном треугольнике  $ABC$  задана точка  $P$ , расстояния от которой до прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  равны  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , соответственно. Найдите радиус  $r_0$  сферы, вписанной в призму с основанием  $ABC$  и касающейся основания в точке  $P$  (выразите его через параметры треугольника и трилинейные координаты точки).

Сначала мы решим эту задачу вычислительно – используя тригонометрию, векторы (по пути вспомним свойства смешанного

произведения) и т.д., и получим формулу

$$r_0^2 = \frac{uvw(w \sin \beta + v \sin \alpha + u \sin \gamma)}{uv \sin \beta + uv \sin \alpha + vw \sin \gamma} \quad (1)$$

(где  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$  – углы треугольника). После этого мы получим другие формулы для  $r_0$ , обсудим подходы к их выводу, а также связи с другими задачами и возможные обобщения.

**Решение задачи 3'.** Проведем через стороны треугольника плоскости, касательные к сфере. Понятно, что эти плоскости образуют боковую поверхность призмы в том и только в том случае, когда радиусы, проведенные в точки касания сферы с ними, лежат в одной плоскости.

Итак, нам надо так подобрать  $r_0$ , чтобы соответствующие отрезки попали в одну плоскость. Для этого мы воспользуемся следующим критерием коллинеарности векторов: три вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  лежат в одной плоскости, если и только если объем параллелепипеда, «натянутого» на них, равен нулю. В аналитической геометрии объем такого параллелепипеда называется смешанным произведением векторов, точнее говоря, модулем смешанного произведения:

$$\text{vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left| \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \right|.$$

Само смешанное произведение часто называют «направленным объемом параллелепипеда»; по определению, он совпадает с обычным объемом, если тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – *положительная*, т.е. если направление вектора  $\vec{c}$  связано с направлениями  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  «правилом буравчика». В противном случае  $\left| \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \right| = -\text{vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Несложно проверить, что величина  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ , определенная таким образом, удовлетворяет следующим свойствам:

- 1)  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rangle$ ;
- 2)  $\langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ ;
- 3)  $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$

для всех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и всех чисел  $\lambda$ . Отметим, что из свойства 1 следует, что

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \rangle.$$

И вообще, для любой наперед заданной перестановки векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  мы получим, что соответствующее смешанное произведение с точностью до знака совпадает с  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ .

Кроме того, ясно, что если взять в качестве векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  единичные векторы, направленные вдоль координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно, то, очевидно,  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = 1$ .

Оказывается, этого достаточно, чтобы написать формулу, выражающую  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$  через координаты векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . В самом деле, так как, переставляя два соседних вектора, мы можем получить любой наперед заданный порядок, свойства, аналогичные 2 и 3, будут выполнены для всех векторов в выражении  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ . С другой стороны, мы можем любой вектор выразить в виде суммы единичных векторов, направленных вдоль осей координат с коэффициентами, как раз равными координатам векторов.

Вооружившись этими знаниями, рассмотрим сечение нашей призмы плоскостью, проходящей через центр  $O$  искомой сферы и ее точки касания с основанием  $ABC$  и боковой стороной  $BB_1C_1C$  (точки  $T$  и  $A_0$ , на рисунке 4). Треугольник  $OTQ$  прямоугольный ( $Q$  – точка пересечения плоскости и отрезка  $BC$ ); его катеты равны  $w$  и  $r_0$ , поэтому тангенс угла  $\varphi = \angle OQT$  равен  $\frac{r_0}{w}$ . Так как  $QO$  – биссектриса, то величина угла  $\angle A_0QT$  равна  $2\varphi$ , а его тангенс равен

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2r_0 w}{w^2 - r_0^2}.$$

Рассмотрим теперь единичный вектор  $\vec{z}$ , направленный вертикально вверх, и единичный вектор  $\vec{a}_1$  в плоскости  $ABC$ , направленный перпендикулярно стороне  $BC$  основания призмы во внешнюю сторону относительно треугольника. Из рисунка 4 видно, что вектор  $\vec{r}_a = \overline{OA_0}$  может быть представлен в виде суммы:

$$\vec{r}_a = \cos 2\varphi \cdot \vec{z} + \sin 2\varphi \cdot \vec{a}_1.$$

Поэтому после преобразований с использованием тригонометрических тождеств  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$  получим

$$\vec{r}_a = \frac{w^2 - r_0^2}{w^2 + r_0^2} \cdot \vec{z} + \frac{4r_0 w}{w^2 + r_0^2} \cdot \vec{a}_1$$

(мы принимаем во внимание, что угол  $2\varphi$  тупой, если и только если  $w < r_0$ ). Аналогичные рассуждения дают следующие выражения для  $\vec{r}_b = \overline{OB_0}$  и  $\vec{r}_c = \overline{OC_0}$ :

$$\vec{r}_b = \frac{v^2 - r_0^2}{v^2 + r_0^2} \cdot \vec{z} + \frac{4r_0 v}{v^2 + r_0^2} \cdot \vec{b}_1,$$

$$\vec{r}_c = \frac{u^2 - r_0^2}{u^2 + r_0^2} \cdot \vec{z} + \frac{4r_0 u}{u^2 + r_0^2} \cdot \vec{c}_1,$$

где мы обозначили символами  $\vec{b}_1$  и  $\vec{c}_1$  единичные векторы в плоскости  $ABC$ , перпендикулярные сторонам  $AC$  и  $AB$  соответственно (и направленные во внешнюю сторону относительно треугольника  $ABC$ ). Чтобы найти теперь смешанное произведение векторов  $\vec{r}_a$ ,  $\vec{r}_b$ ,  $\vec{r}_c$ , мы воспользуемся тем, что по сделанному ранее замечанию  $\vec{z}$  может появиться только один раз в каждом месте выражения  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c \rangle &= \frac{u^2 - r_0^2}{u^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 v}{v^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 w}{w^2 + r_0^2} \langle \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{z} \rangle + \\ &+ \frac{4r_0 u}{u^2 + r_0^2} \cdot \frac{v^2 - r_0^2}{v^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 w}{w^2 + r_0^2} \langle \vec{c}_1, \vec{a}_1, \vec{z} \rangle + \\ &+ \frac{4r_0 u}{u^2 + r_0^2} \cdot \frac{4r_0 v}{v^2 + r_0^2} \cdot \frac{w^2 - r_0^2}{w^2 + r_0^2} \langle \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{z} \rangle. \end{aligned}$$

С другой стороны, смешанные произведения, стоящие справа это объемы прямых параллелепипедов высоты 1 с основанием – ромбом, образованным  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{c}_1$  (несложно видеть, что все знаки при этих объемах отсутствуют). Так как по определению векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{c}_1$  углы между ними дополняют до  $180^\circ$  углы треугольника, получаем

$$\langle \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1 \rangle = \sin \gamma, \langle \vec{c}_1, \vec{a}_1, \vec{z} \rangle = \sin \beta, \langle \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{z} \rangle = \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c \rangle &= 16r_0^2 \left( (uvw(w \sin \beta + v \sin \alpha + \right. \\ &+ u \sin \gamma) - r_0^2 (uv \sin \beta + uw \sin \alpha + \\ &+ vw \sin \gamma)) : (u^2 + r_0^2)(v^2 + r_0^2)(w^2 + r_0^2) \left. \right). \end{aligned}$$

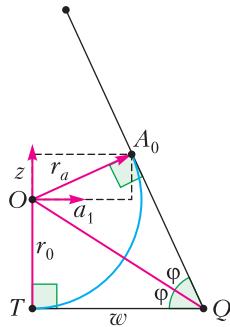


Рис. 4



*...что хорошего можно сделать с вещами, не приведенными к степени и мере, особенно в физике?*

Алессандро Вольта

*Произведенное с большей точностью измерение длины дуги меридиана ... было положено в основу наиболее простой и естественной метрической системы мер.*

Пьер Симон Лаплас

*...каждая молекула во Вселенной носит на себе печать меры и числа настолько же ясную, как и метр парижских архивов или как двойной царский локоть карнакского храма.*

Джеймс Клерк Максвелл

*Я часто удивляюсь тому незначительному вниманию, которое уделяется великому принципу подобия даже со стороны весьма крупных ученых.*

Джон Уильям Рэлей

*В физике ... нет места для путаных мыслей... Действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности.*

Энрико Ферми

*Будьте осторожны! Проверьте систему единиц, когда открываете новую книгу об электричестве!*

Яков Смородинский

## А так ли хорошо знакомы вам размерность и подобие?

Перевод мер, измерения, размерность – одни из первых терминов, встречающихся в самом начале изучения физики. В их основании – понятие МЕРЫ, с которым стоит крепко подружиться и как с необходимым инструментом для грамотного решения задач, и как с опорой для качественного анализа разнообразных физических ситуаций.

Понять, что «скрепляет» описывающие явление величины, что лежит в фундаменте используемых вами систем единиц, каков баланс между интуицией и расчетом – это и еще очень многое дает владение методом размерностей и тесно связанным с ним принципом подобия.

Разговор об этом займет не один выпуск «Калейдоскопа». Пока же, подобно нашим наставникам из эпитафий, займемся развитием *чувства меры* в физике.

### Вопросы и задачи

1. Что общего между морской милей (равной 1852 м) и секундой?

2. До отхода поезда 2 мин, а путь до вокзала 2 км. Если первый километр спортсмен бежал со скоростью 30 км/ч, то с какой скоростью он должен пробежать второй километр?

3. Может ли самолет за 1 секунду пролететь 1 километр?

4. Девочки слепили снеговика, а мальчики соорудили точную его копию, но в два раза большей высоты. Какова масса копии, если масса оригинала 50 кг? Плотность снега считайте неизменной.

5. Баскетбольный мяч нужно накачать на 8 фунтов на квадратный дюйм (PSI, round per square inch). Манометр насоса измеряет давление в паскалях. Что покажет прибор после накачки?

6. Одной из характеристик писчей бумаги является ее плотность  $\sigma$ , для измерения которой используют внесистемную единицу  $\text{г/м}^2$ . Какое давление оказывает на стол лист бумаги плотностью  $\sigma$ ?

7. Как, пользуясь соображениями размерности, определить зависимость скорости звуковых волн в стержне от модуля Юнга и плотности материала?

8. Металлическое кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен  $q$ . Новое кольцо таких же габаритов сделано из материала, плотность которого в 10 раз больше. Какой заряд разорвет новое кольцо?

9. Какая физическая величина может измеряться в единицах  $(\text{Дж}/\text{Кл}^2) \cdot \text{с}$ ?

10. Потенциал в вершине кубика, заряженного равномерно по объему, равен 12 В. Чему равен потенциал в центре кубика?

11. В каких единицах выражается интенсивность электромагнитного излучения?

### Микроопыт

Изобразите, например с помощью транспортира, центральный угол величиной в 10 градусов, затем рассмотрите его через лупу. Изменится ли величина угла?

### Любопытно, что...

... с древних времен индейцы при покупке земли в качестве единицы измерения принимали территорию, которую человек мог обойти за один день. Поэтому покупатели обычно нанимали для этого самого быстрого бегуна.

... размеры многих монументальных сооружений, в том числе и знаменитого Стоунхенджа, кратны особой мере длины, названной мегалитическим ярдом и равной 82,9 сантиметра.

... Галилей с помощью анализа размерностей впервые пришел к выводу, что величина безопасной нагрузки на единицу объема балки обратно пропорциональна ее длине.

... в решении Галилеем задачи о колебаниях маятника уже содержались соображения о подобном поведении подобных систем. Принцип же подобия в ясном виде впервые сформулировали Ньютон и Гук.

... к понятию размерности физической величины и принципу однородности по размерностям в 1822 году первым прибегнул французский ученый Жан Фурье, а развил и распространил Джеймс Максвелл.

... в 1832 году немецкий математик и физик Карл Гаусс создал абсолютную систему мер, введя три основные единицы для трех основных величин – времени, длины и массы. А в 1881 году в Париже был созван Международный конгресс, впервые учредивший общепринятые единицы измерения для физических величин, присвоив им названия в честь великих физиков.

... по сей день некоторые внесистемные единицы не утрачивают своей актуальности и удобства и продолжают активно использоваться – как, например, «лошадиная сила», «астрономическая единица длины» и «миллиметр ртутного столба».

... Макс Планк, введший в 1900 году свою знаменитую постоянную, отмечал, что его константа вместе со скоростью света и ньютоновской гравитационной постоянной образуют абсолютную систему единиц. Принципиально, что с точным определением и фиксацией величины фундаментальных констант тесно связаны современные значения эталонов единиц измерения.

... основополагающее открытие квантовой физики – идея квантования – родилось на основе анализа Нильсом Бором размерностей физических величин, характеризующих движение электрона вокруг ядра атома.

... подлетевший в 1999 году к Марсу космический аппарат НАСА прошел слишком низко над поверхностью планеты и сгорел в ее атмосфере. К аварии привела постыдная ошибка: одна группа специалистов использовала при расчетах британские единицы измерения (фунт-сила), а другая – метрические (ньютон).

### Что читать в «Кванте» о размерности и подобии (публикации последних лет)

1. «Из записной книжки учителя» – 2014, №5/6, с. 18;
2. «Сила в один буратино» – 2015, №2, с.30;
3. «Размерности и ... правило квантования Бора» – 2016, Приложение №2, с.144;
4. «Объять необъятное, или Ее преПодобие Размерность» – 2019, №2, с.2;
5. «Зачем плющить зерна, или О плотности потоков» – 2019, №11, с. 27;
6. «Вычисления без вычислений» – 2020, №1, с.21;
7. «Белые карлики – кристаллические звезды» – 2021, №5, с.17.

Материал подготовил А.Леонович

Равенство нулю этого выражения эквивалентно обращению в ноль числителя дроби, откуда получаем искомое выражение для  $r_0$  из правой части формулы (1).

Прежде всего отметим, что получившееся выражение всегда имеет смысл: так как  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – углы треугольника, их синусы всегда положительные, а значит, дробь, стоящая справа, всегда положительная. Поэтому, нам можно не беспокоиться – наша формула всегда дает ответ на поставленный вопрос.

Таким образом, формула (1), полученная нами, всем хороша, кроме одного: мы получили ее чисто алгебраически, а значит, нам будет трудно понять, каковы геометрические свойства у этого выражения. Да и вообще, хотелось бы иметь более «синтетическое», «школьное» решение нашей задачи.

Давайте для начала посмотрим повнимательнее на получившееся выражение: в знаменателе формулы (1) стоит сумма  $uv \sin \beta + u \omega \sin \alpha + v \omega \sin \gamma$ . Так как  $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ , мы видим (рис.5), что эта сумма

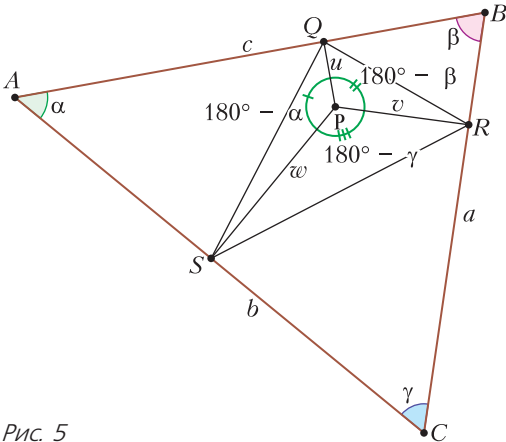


Рис. 5

равна удвоенной площади треугольника  $QRS$ . С другой стороны, в числителе дроби стоит выражение

$$\begin{aligned}
 uv\omega(\omega \sin \beta + v \sin \alpha + u \sin \gamma) &= \\
 &= uv\omega \left( \omega \frac{b}{2R} + v \frac{a}{2R} + u \frac{c}{2R} \right),
 \end{aligned}$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – стороны треугольника  $ABC$ , а  $R$  – радиус описанной около него окружности (мы воспользовались теоремой синусов).

Так как  $\frac{1}{2}av = S_{BCP}$ ,  $\frac{1}{2}b\omega = S_{CAP}$ ,  $\frac{1}{2}c\omega = S_{ABP}$ ,

мы видим, что числитель дроби равен  $\frac{uv\omega}{R} S_{ABC}$ . В итоге мы получаем следующую формулу для радиуса сферы:

$$r_0^2 = \frac{uv\omega}{2R} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{QRS}}. \tag{2}$$

Согласно знаменитой теореме Эйлера о площади педального треугольника,

$$S_{QRS} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2} S_{ABC},$$

где  $d$  – расстояние от  $P$  до центра описанной около  $ABC$  окружности. Подставляя это выражение в формулу для радиуса сферы, получаем

$$r_0^2 = \frac{2Ruv\omega}{R^2 - d^2}. \tag{3}$$

Эта формула гораздо проще и симметричнее предыдущей, однако оставляет не меньше вопросов; прежде всего, непонятно, можно ли получить выражение, стоящее справа, исходя из геометрических соображений?

Признаюсь честно, ответа на этот вопрос у меня нет, и если кто-нибудь из читателей найдет решение, выдающее полученное нами выражение для  $r_0$ , исходя из чисто геометрических соображений, и не использующее большого количества выкладок, я буду рад на него посмотреть. Однако приведу рассуждение, позволяющее немного сократить вычисления и заодно проясняющее связь между радиусом вписанной сферы и свойствами изогонального сопряжения.

Посмотрите на рисунок 6: на нем изображено сечение данной призмы плоскостью, проходящей через

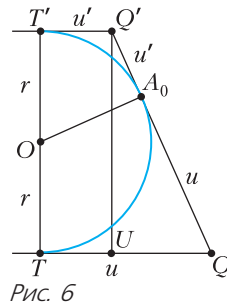


Рис. 6

проходящей через центр сферы и точки ее касания с основаниями и гранью  $BB_1A_1A$ . Видно, что получившаяся фигура является трапецией с прямыми углами при вершинах  $T$  и  $T'$ . В силу равенства отрезков касательных

получаем, что  $QQ' = u + u'$  (где  $u'$  – расстояние от точки касания сферы с верхним основанием призмы  $Q'$  до стороны  $B_1A_1$ ). Проведя высоту призмы через  $Q'$ , получаем прямоугольный треугольник  $QUQ'$  с кате-

тами  $|u - u'|$  и  $2r_0$ . Отсюда по теореме Пифагора получаем

$$4r_0^2 = (u + u')^2 - (u - u')^2 = 4uu',$$

т.е.  $uu' = r_0^2$ . Мы видим, что  $r_0$  очень просто выражается через расстояния  $u$  и  $u'$ . Таким же образом,

$$uu' = vv' = ww' = r_0^2. \quad (4)$$

Следовательно,  $u' = \frac{r_0^2}{u}$ ,  $v' = \frac{r_0^2}{v}$ ,  $w' = \frac{r_0^2}{w}$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} cu + av + bw &= 2S_{ABC} = 2S_{A_1B_1C_1} = \\ &= cu' + av' + bw' = c \frac{r_0^2}{u} + a \frac{r_0^2}{v} + b \frac{r_0^2}{w}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r_0^2 = 2S_{ABC} : \left( \frac{c}{u} + \frac{a}{v} + \frac{b}{w} \right),$$

что с помощью теоремы синусов несложно преобразовать к уже знакомому нам виду

$$r_0^2 = \frac{uvw}{2R} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{QRS}}.$$

Такое решение, конечно, выглядит проще, чем предыдущее, но оно тоже в конечном итоге объясняет появление площади треугольника  $QRS$  при помощи теоремы синусов и некоторого количества преобразований. Кроме того, оно позволяет нам получить формулу, выражающую расстояния  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  от точки, изогонально сопряженной данной, до прямых, содержащих стороны треугольника:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r^2}{u} = \frac{2Rvw}{R^2 - d^2}, \quad v' = \frac{r^2}{v} = \frac{2Ru w}{R^2 - d^2}, \\ w' &= \frac{r^2}{w} = \frac{2Ruv}{R^2 - d^2}. \end{aligned}$$

Конечно, эти формулы известны, но интересно, однако, что мы пришли к ним из стереометрических соображений.

Завершая разговор, приведем обобщения для описанной вокруг сферы усеченной треугольной пирамиды. Основания такой усеченной пирамиды – треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , у которых соответствующие стороны параллельны. Таким образом, случай призм возникает при равенстве треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Доказательства предложен-

ных утверждений мы не приводим. Читатель может попробовать доказать их самостоятельно (хотя доказать их не так просто).

**Утверждение 2.** Если сфера, вписанная в усеченную треугольную пирамиду, касается основания  $ABC$  в некоторой точке  $P$ , а основания  $A'B'C'$  – в точке  $P'$ , то преобразование подобия, которое переводит треугольник  $A'B'C'$  в  $ABC$ , будет переводить точку  $P'$  в точку, изогонально сопряженную точке  $P$  (относительно треугольника  $ABC$ ).

**Утверждение 2'.** Пусть дан трехгранный угол и плоскость, пересекающая его по треугольнику  $ABC$ . В трехгранный угол вписаны две сферы, касающиеся плоскости  $ABC$  в точках  $P$  и  $P'$ . Тогда  $P$  и  $P'$  – изогонально сопряженные точки треугольника  $ABC$ .

**Задача 4** (А. Заславский, XVII Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). В усеченную треугольную пирамиду вписана сфера, касающаяся оснований в точках  $T_1$ ,  $T_2$ . Пусть  $h$  – высота пирамиды, а  $R_1$ ,  $R_2$  – радиусы окружностей, описанных около ее оснований,  $O_1, O_2$  – центры этих окружностей. Докажите, что

$$R_1 R_2 h^2 = (R_1^2 - O_1 T_1^2)(R_2^2 - O_2 T_2^2). \quad (5)$$

Отметим, что формула (5) согласуется с нашей формулой (3).

В самом деле, для случая описанной призм формула (5) приобретает вид

$$4R^2 r_0^2 = (R^2 - d^2)(R^2 - d^2), \quad (6)$$

поскольку  $R_1 = R_2 = R$ ,  $h = 2r_0$ ,  $O_1 T_1 = d$  и аналогично  $O_2 T_2 = d'$  для изогонально сопряженной точки. Теперь равенство (6) можно получить, перемножив формулу (3) с такой же формулой для изогонально сопряженной точки и воспользовавшись равенствами (4).

*Автор благодарит Павла Кожевникова за многочисленные важные и полезные замечания и добавления, которые в значительной мере улучшили текст.*



# Издалека долго течет река...

**А. СТАСЕНКО**

*В природе ...всюду разлито чувство,  
но только в реках содержится мысль.*

Алексей Иванов

Рек на Земле – великое множество. Среди них есть полноводные потоки, породившие пышные цивилизации (Нил, Евфрат...), и мифические реки забвения (Лета, Стикс). А кто же не знает русских рек – от Волги и Дона до Лены и Амура...

Любая река – сложный организм, не удивительно, что к концу прошлого тысячелетия уже существовало более 350 феноменологических теорий речных процессов. Однако это не остановило некоего Способного ЕГЭшника, который решил развить самую современную физико-математическую модель реки. Конечно, как полагается во всякой приличной модели, приняв «ряд упрощающих предположений».

Прежде всего наш исследователь вспомнил о динамике тела переменной массы  $m(t)$ , которая описывается известным (1897) уравнением Мещерского (1859–1935), содержащим секундный расход массы  $\mu = -\frac{dm}{dt}$  ( $[\mu] = \text{кг/с}$ ) и скорость движения этой массы относительно тела  $u$ :

$$m \frac{dv}{dt} = \mu u + F.$$

В отсутствие внешних сил ( $F = 0$ ) отсюда получается знаменитое уравнение (1903) Циолковского (1857–1935), лежащее в основе современной ракетной техники:

$$mdv = -udm, \text{ или } \frac{v}{u} = \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Здесь положено  $v = 0$  и  $m = m_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ , а расход массы  $\mu$  считается постоянным, так что  $m = m_0 - \mu t$  (рис.1).

Заметим, что подобные исследования неоднократно проводились в течение 19-го века,

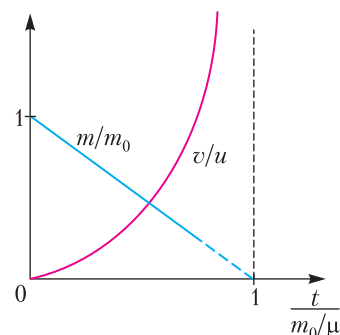


Рис. 1. Ракета жертвует массой и может приобрести сколь угодно большую скорость

но, значительно опережая свое время, не произвели того впечатления, которое выпало на долю более поздних исследований начала 20-го столетия.

Другой пример – рост капли, которая начинает падать в поле тяжести (ускорение  $g$ ) в облаке неподвижных микрокапель со средней плотностью  $\rho_k$ . Рост массы падающей капли описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = \pi v r^2 \rho_k = \mu > 0.$$

При этом относительная скорость прилипающих микрокапель равна  $u = -v$ , так что уравнение Мещерского дает

$$m \frac{dv}{dt} = mg - v \frac{dm}{dt}, \text{ или } \frac{d(mv)}{dt} = mg.$$

Учитывая, что  $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v$ , из этих уравнений получим (рис.2)

$$m \sim r^3 \sim at^6, \quad r \sim x = \frac{at^2}{2}, \quad a = \frac{g}{7},$$

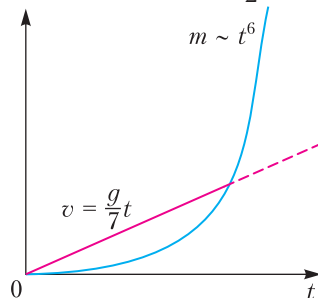


Рис. 2. Инертные микрокапли облака, сливаясь с падающей макрокаплей, значительно уменьшают ускорение последней. Показан результат в начале процесса, когда сопротивлением воздуха еще можно пренебречь



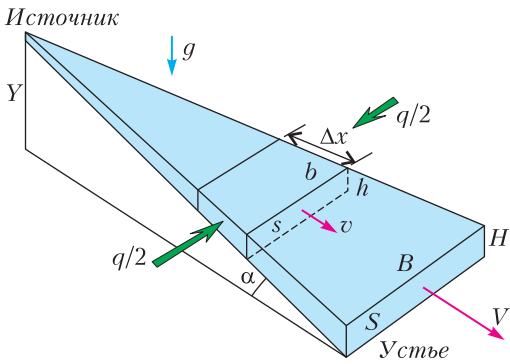


Рис. 3. Модель реки, поток воды в которой растет за счет притоков;  $\alpha$  – угол наклона равнины, по которой течет река

где  $x$  – расстояние, пройденное с начального момента,  $\rho_B$  – плотность воды,  $r$  – радиус капли,  $a$  – ее ускорение.

А как же река? В отличие от ракеты, теряющей массу ради увеличения скорости, расход воды в реке растет за счет притоков. Если слева и справа порции воды прибывают под прямым углом к руслу реки (рис.3), последней приходится ускорять их, как и капле, падающей в облаке (вспомним, что  $u = -v$ ). Расход воды  $\rho_B v s$  можно выражать в кг/с, но поскольку плотность воды почти постоянна, то в речном хозяйстве ее расход  $sv$  выражают в м<sup>3</sup>/с. Изменение этой величины вдоль  $x$  (вдоль течения) запишется в виде

$$\frac{d(sv)}{dx} = q, [q] = \frac{m^3}{c \cdot m_x}.$$

Здесь введен «метр вдоль потока –  $m_x$ », во избежание искушения сократить его с кубометрами.

Напомним, что существует два подхода в динамике непрерывной среды, связанных с именами двух великих ученых. Согласно Лагранжу (1736–1813), предлагается выделить, т.е. пометить начальными значениями координат, частицу среды и следить за изменением во времени этих значений вдоль траектории частицы. Согласно Эйлеру (1707–1783), течение непрерывной среды анализируется в различных точках пространства в данный отрезок времени.

Оценивая выше динамику капли в облаке, мы приняли подход Лагранжа. Для эволюции параметров реки как пространственно протяженного тела целесообразно принять точку зрения Эйлера. Для наших целей

достаточно иметь в виду связь между этими подходами – масса тела заменяется плотностью потока массы:  $m \leftrightarrow \rho s v$ , производная по времени заменяется производной по пространству:  $\frac{d}{dt} \leftrightarrow v \frac{d}{dx}$ , что вполне очевидно, так как  $v = \frac{dx}{dt}$ . Подчеркнем, что здесь рассматривается *стационарное* течение реки. По сути, мы уже использовали эту замену при формировании уравнения расхода массы.

При выводе уравнения импульсов для текущей реки вспомним вывод уравнения динамики капли переменной массы, растущей за счет встречных инертных микрокапель:

$$m \frac{dv}{dt} = -v \frac{dm}{dt} + mg, \text{ или } \frac{d(mv)}{dt} = mg.$$

Для реки, текущей по наклонной плоскости, получим

$$sv \frac{dv}{dx} = -v \frac{d(sv)}{dx} + sg \sin \alpha + \frac{f}{\rho_B},$$

так что

$$\frac{d(sv \cdot v)}{dx} = sg \sin \alpha + \frac{f}{\rho_B}.$$

Здесь мы уже поделили на плотность воды и кроме скатывающей силы учли тормозящую силу, приходящуюся на единицу длины реки, от всех притоков. Однако, по крайней мере из соображений размерности, можно записать выражение этой силы в виде  $\xi \rho_B v^2 b \Delta x$ , в котором все особенности «спрятаны» в коэффициенте  $\xi$ . (Неплохо было бы, подумал наш способный герой, оценить хотя бы порядок этого коэффициента.) В результате получим изменение импульса потока жидкости в виде

$$\frac{d(sv \cdot v)}{dx} = sg \sin \alpha - \xi v^2 b.$$

Здесь учтено, что река широка, но не очень глубока относительно своей ширины:  $\frac{h}{b} \ll 1$ , поэтому «смоченный» периметр почти равен  $b$  (см. рис.3).

Для удобства анализа уравнений часто используют масштабирование переменных, относя их к соответствующим характерным значениям. В рассматриваемом случае такими масштабами можно выбрать значения

переменных в устье реки: скорость  $V$ , сечение потока  $S$ , длина реки  $L$ . Проведя это масштабирование и сохраняя для простоты прежние обозначения (но ничего не забывая), запишем систему уравнений в «безразмерном» виде:

$$\frac{d(sv)}{dx} = q \frac{L}{SV}, \quad \frac{d(sv \cdot v)}{dx} = As - Bv^2 \sqrt{s},$$

где  $A = \frac{Lg \sin \alpha}{V^2}$ ,  $B = \xi \frac{L\sqrt{B/H}}{\sqrt{S}}$ . Даже не решая полученную систему уравнений (кто хочет – почему бы нет?), можно получить важные сведения. В частности, первый коэффициент  $A$  в правой части второго уравнения имеет глубокий физический смысл. Ведь равенство

$$\frac{V_{\max}^2}{2} = gY$$

определяет максимальную скорость, которую приобретает тело или та же река, свободно падая с высоты  $Y = L \sin \alpha$ . Второе слагаемое содержит все геометрические масштабы реки – длину, ширину, глубину.

Однако, подумал Способный ЕГЭшник, пора сделать некоторые численные оценки. Примем следующие значения определяющих параметров, характерные для «типичной» равнинной реки:  $L = 3000$  км,  $S = 10^4$  м<sup>2</sup>,  $B/H = 10^2$ ,  $Y = 300$  м,  $\alpha = 10^{-4}$  рад.,  $V = 1$  м/с. Отметим, в частности, что вследствие малости угла наклона долины можно положить  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Уравнение импульсов в безразмер-

ных переменных примет вид

$$\frac{d(sv \cdot v)}{dx} = 3 \cdot 10^3 s - \xi v^2 \sqrt{s} \cdot 3 \cdot 10^5.$$

Видно, что первый численный коэффициент  $A$  в правой части уравнения намного превышает единицу, а ведь наибольшие значения всех искомого переменных равны единице, согласно выполненному масштабированию. Следовательно, левая часть уравнения не превышает единицы, а значит, и второе слагаемое справа почти равно первому. Таким образом, мы имеем малую разность двух больших величин, описывающих скатывающую силу и силу торможения, и эту разность можно положить равной нулю. (Фактически это означает, что силой инерции можно пренебречь. Иначе, сидя в лодке, увлекаемой потоком, мы почувствовали бы, что нас отбрасывает к корме.) Отсюда, положив  $v = 1$ ,  $s = 1$ , получим полезную оценку коэффициента:  $\xi = 10^{-2}$ .

Конечно, в приведенных выше рассуждениях не учтено влияние дождей, испарения, подводных ключей, гейзеров, русалок и водяных, инфльтрации воды в грунт, ветровых волн, силы Кориолиса (ведь Земля вращается)... Но «не заграждай источника, который готов произвести из себя большую реку» (Григорий Богослов).

Впрочем, кто мешает вдумчивому Читателю учесть все это в более совершенных физико – математических моделях?

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

### Что такое дождевание

**С.ДВОРЯНИНОВ**

**П**рекрасное время года – весна. Одно может беспокоить: внезапное изменение погоды. Ориентироваться только на календарь нельзя: то вдруг подует холодный ветер, то заморозки нагрянут. А еще бывает и так, что пройдет ледяной дождь.

У человека при этом нет никаких проблем. Как сказал поэт, у природы нет плохой погоды. В доме можно снова включить отопление, а выходя на улицу, надеть теплую куртку и шапку. Но вот у Природы...

Больно видеть, как покрываются коркой льда ветки деревьев с распустившимися цветками (рис.1) или как на газонах закрываются и ждут тепла знакомые нам одуванчики (рис.2). А что делать с цветущими плодовыми деревьями и кустарниками? Как защитить их от поздних весенних заморозков? Низкая температура может свести на нет весь будущий урожай.

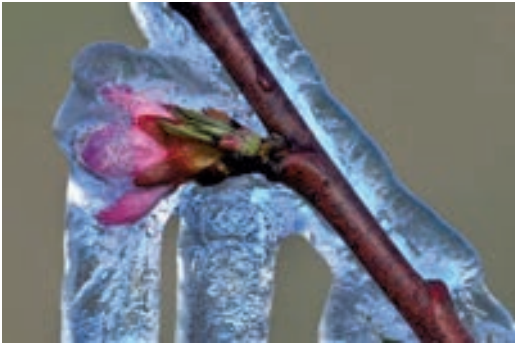


Рис. 1



Рис. 2

Средства защиты известны. Мелкие растения (например, рассаду помидоров) можно укрыть. Во многих местах, особенно в низинах, садоводы и виноградари разводят дымные костры или жгут специальные свечи. Теплый воздух сохраняет нежные почки, ростки и цветки от холода. Картина при этом возникает фантастическая и напоминает таинственный ночной город (рис.3). Но свечи стоят дорого, а дышать дымом не очень приятно.



Рис. 3

Среди многих способов защиты растений от воздействия низких температур есть и способ дождевания. На одном садоводческом сайте было написано, что «мелко распыляемая вода при попадании на растения испаряется, тем самым подогревая воздух вокруг». Прочитав это, можно насторожиться. Неужели все происходит именно так? Казалось бы, если вода испарилась с поверхности растения, то она забрала тепло у растения, росточку-лепесточку стало хуже. Каждый помнит, что если после душа не вытереться полотенцем насухо, то придется тратить тепло на испарение воды с поверхности тела, а так и до простуды недалеко. И даже в жаркую погоду (при испарении пота, например) на сквозняке можно застудить и горло, и легкие.

Как же на самом деле действует дождевание при заморозках? Попробуем разобраться.

При распылении воды в воздухе получаются очень мелкие водяные капли, которые затем сливаются в более крупные капли. Вот при этом-то слиянии и выделяется в атмосферу энергия в виде тепла. Поясним этот факт. Наверное, все видели, как на горизонтальной поверхности стекла две капли сливаются в одну. Если мы хотим снова получить две капли, т.е. «расщепить» большую каплю на малые, то для этого надо совершить определенную работу. По крайней мере – для преодоления сил поверхностного натяжения. Совершаемая работа перейдет в потенциальную энергию капель, которая при их слиянии выделится в виде тепла.

При дождевании в воздухе фактически образуется туман, состоящий из огромного числа мельчайших капелек воды. При их слиянии и последующем выпадении в виде дождя выделяется тепло, которое существенным образом повышает температуру воздуха. По этой же причине зимой после снегопада становится теплее, порой до оттепели.

# LXXXIV Московская математическая олимпиада школьников

28 марта 2021 года прошла очередная Московская математическая олимпиада (одновременно со сложным вариантом весеннего тура Турнира городов, многие задачи были общими). Приводим некоторые задачи олимпиады (в скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась). Все условия и решения можно найти на сайте [olympiads.mccme.ru/mmo](http://olympiads.mccme.ru/mmo).

## Избранные задачи

**1.(8)** Барон Мюнхгаузен утверждает, что к любому двузначному числу можно справа приписать еще две цифры так, чтобы получился полный квадрат (к примеру, если задано число 10, то дописываем 24 и получаем  $1024 = 32^2$ ). Прав ли барон?

*М.Евдокимов*

**2.(8)** Митя купил на день рождения круглый торт диаметром 36 сантиметров и 13 тоненьких свечек. Мите не нравится, когда свечки стоят слишком близко, поэтому он хочет поставить их на расстоянии не меньше 10 сантиметров друг от друга. Поместятся ли все свечки на торте?

*Д.Мухин*

**3.(8)** В правильном пятиугольнике  $ABCDE$  отмечена точка  $F$  – середина  $CD$ . Серединный перпендикуляр к  $AF$  пересекает  $CE$  в точке  $H$ . Докажите, что прямая  $AH$  перпендикулярна прямой  $CE$ .

*А.Блинков*

**4.(8)** В каждом из 16 отделений коробки  $4 \times 4$  лежит по золотой монете. Коллекционер помнит, что какие-то две лежащие рядом монеты (соседние по стороне) весят по 9 граммов, а остальные – по 10 граммов. За какое наименьшее число взвешиваний на весах, показывающих общий вес в граммах, можно определить эти две монеты?

*М.Евдокимов*

**5.(8)** В некотором государстве 32 города, каждые два из которых соединены дорогой с

односторонним движением. Министр путей сообщения, тайный злодей, решил так организовать движение, что, покинув любой город, в него нельзя будет вернуться. Для этого он каждый день, начиная с 1 июня 2021 года, меняет направление движения на одной из дорог. Докажите, что он сможет добиться своего к 2022 году (т.е. за 214 дней).

*А.Заславский*

**6.(9)** Положительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = a/b$ . Что больше:  $a + b$  или  $ab$ ?

*В.Клепцын, А.Гусев*

**7.(9)** Клетки бумажного квадрата  $8 \times 8$  раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата  $2 \times 2$ , не имеющих общих клеток одинаковой раскраски. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)

*Л.Попов, А.Гусев*

**8.(10)** На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую – то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

*М.Евдокимов*

**9.(10)** Дана равнобокая трапеция, сумма боковых сторон которой равна большему основанию. Докажите, что острый угол между диагоналями не больше  $60^\circ$ .

*А.Блинков*

**10.(10)** Есть бесконечная в одну сторону клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы натуральными числами, и мешок с десятью камнями. В клетках полоски камней изначально нет. Можно делать следующее:

– перемещать камень из мешка в первую клетку полоски или обратно;

– если в клетке с номером  $i$  лежит камень, то можно переложить камень из мешка в клетку с номером  $i + 1$  или обратно.

Можно ли, действуя по этим правилам, положить камень в клетку с номером 1000?

*А.Шень*

**11.(10)** Внутри четырехугольника  $ABCD$  взяли точку  $P$ . Прямые  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $X$ . Оказалось, что прямая  $XP$  является внешней биссектрисой углов  $APD$  и  $BPC$ . Пусть  $PY$  и  $PZ$  – биссектрисы треугольников  $APB$  и  $DPC$ . Докажите, что точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  лежат на одной прямой.

*Ф.Нилов*

**12.(11)** Существует ли функция  $f$ , определенная на отрезке  $[-1; 1]$ , которая при всех действительных  $x$  удовлетворяет равенству

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + \sin x?$$

*Д.Горяшин*

**13.(11)** В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?

*П.Бородин*

**14.(11)** Многогранник (выпуклый) с вершинами в серединах ребер некоторого куба называется *кубооктаэдром*. В сечении кубооктаэдра плоскостью получился правильный многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

*М.Евдокимов*

**15.(11)** Многочлен  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что  $c > ab$ .

*Фольклор*

**16.(11)** В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности. Точка  $B_1$  симметрична точке  $B$  относительно стороны  $AC$ . Прямые  $AO$  и  $B_1C$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что луч  $KA$  является биссектрисой угла  $BKB_1$ .

*М.Евдокимов*

**17.(11)** Найдите наименьшее натуральное число  $N > 9$ , которое не делится на 7, но если

вместо любой его цифры поставить семерку, то получится число, которое делится на 7.

*М.Евдокимов*

**18.(11)** Существует ли такой выпуклый четырехугольник, у которого длины всех сторон и диагоналей в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию?

*О.Косухин*

**19.(11)** В лаборатории на полке стоят 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной – яд и в одной – противоядие. Пробирки случайно перемешались, и нужно найти пробирку с ядом и пробирку с противоядием. Для этого можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей жидкостей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат: +1, если в смеси есть яд и нет противоядия; –1, если в смеси есть противоядие, но нет яда; 0 в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по сообщенным результатам гарантированно определить, в какой пробирке яд, а в какой противоядие?

*С.Брагин, Д.Галатенко*

*Публикацию подготовил Е.Епифанов*

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

| УСЛУГИ                                  | АССОРТИМЕНТ                                       |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------|
| ■ Интернет-магазин<br>www.bgshop.ru     | ■ Книги                                           |
| ■ Кафе                                  | ■ Аудиокниги                                      |
| ■ Клубные (дисконтные)<br>карты и акции | ■ Антиквариат<br>и предметы<br>коллекционирования |
| ■ Подарочные карты                      | ■ Фильмы, музыка,<br>игры, софт                   |
| ■ Предварительные<br>заказы на книги    | ■ Канцелярские<br>и офисные товары                |
| ■ Встречи с авторами                    | ■ Цветы                                           |
| ■ Читательские клубы<br>по интересам    | ■ Сувениры                                        |
| ■ Индивидуальное<br>обслуживание        |                                                   |
| ■ Подарочная упаковка                   |                                                   |
| ■ Доставка книг из-за рубежа            |                                                   |
| ■ Выставки-продажи                      |                                                   |

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
www.biblio-globus.ru  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

www.biblio-globus.ru



# Московская олимпиада школьников по физике 2021 года

## Заключительный этап

7 класс

### 1. Обычные и «Ласточки» (7 баллов)

На железнодорожной ветке, связывающей город  $M$  с областным центром  $T$ , есть (кроме прочих) остановки в городке  $Z$  и поселке  $P$ . От  $M$  до  $Z$  проложены два пути для движения поездов в направлении  $T$ , а от  $Z$  до  $P$  – один путь (рис.1). Расстояние от  $M$  до  $Z$

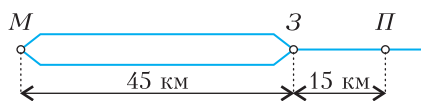


Рис. 1

равно 45 км, а от  $Z$  до  $P$  – 15 км. Начиная с 17:00 и до 21:00 от  $M$  в направлении  $T$  каждые пятнадцать минут отправляются скоростные электропоезда «Ласточка», которые останавливаются в  $Z$ , но не останавливаются в  $P$ , а также хотя бы раз в час отправляются обычные электрички, останавливающиеся и в  $Z$  и в  $P$ . Ласточки движутся со средней скоростью 120 км/ч, а обычные электрички – со средней скоростью 45 км/ч. На пути от  $M$  до  $Z$  Ласточки и обычные электрички движутся по разным путям, не мешая друг другу. Электричка не отправляется из  $Z$ , если на пути до  $P$  ее может догнать Ласточка, выжидая в  $Z$  удобного момента для отправления (так, чтобы можно было доехать до  $P$ , не мешая Ласточкам). Можно считать, что посадка, высадка и пересадка пассажиров с одного электропоезда на другой на остановках происходят за пренебрежимо малое время.

**А.** За какое минимальное время можно доехать до поселка  $P$  по железной дороге, отправившись из  $M$  в интервале времени от 18:00 до 19:00 включительно, в случае наиболее удобного расписания электричек? (3 балла)

**В.** В какое время (часов, минут) в интервале от 18:00 до 18:30 включительно следует назначить отправление электричек от  $M$ , чтобы они приходили в  $P$ , не задерживаясь в  $Z$ ? Укажите все значения. (4 балла)

*П.Крюков, А.Бычков*

### 2. Губка Менгера (10 баллов)

На рисунке 2 воспроизведен компьютерный рисунок из «Википедии» (автор: Niabot),

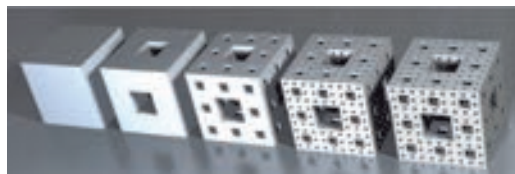


Рис. 2

на котором изображены первые итерации построения фрактала под названием «Губка Менгера». На первой итерации в кубе делают три сквозных отверстия квадратного сечения. Оси отверстий взаимно перпендикулярны, перпендикулярны граням куба и проходят через середины граней. Длина стороны квадрата, лежащего в сечении отверстия, равна  $1/3$  длины стороны грани куба. На второй итерации подобные отверстия проделывают в маленьких кубиках, образовавшихся на гранях большого куба, и так далее.

Пусть имеется заготовка в виде куба с длиной стороны 1 м, изготовленная из пластика плотностью  $1000 \text{ кг/м}^3$ , а также устройство, при помощи которого можно делать в этой заготовке отверстия квадратного сечения сколь угодно малого размера. Из куба решили изготовить  $n$ -ю итерацию Губки Менгера.

**А.** Чему равна средняя плотность куба на четвертой итерации (последний кубик на рисунке)? (4 балла)

**В.** Представим себе, что образующиеся на  $n$ -й итерации полости заполняют пластиком плотностью  $2000 \text{ кг/м}^3$ . Чему может быть равна средняя плотность куба на  $n$ -й ( $n \geq 0$ ) итерации? В ответе укажите границы диапазона возможных значений плотности. (2 балла)

**С.** Нам не нравится, что губка белая. Решили покрасить все грани губки на второй итерации (в том числе все внутренние) синей краской, расход которой составляет  $100 \text{ г/м}^2$ . Хватит ли для этого одной банки, содержащей 1 кг краски? А двух банок? (4 балла)

*П.Крюков, А.Бычков*

**3. «Ты-дым, ты-дым» (8 баллов)**

Путешествуя на поезде, можно обратить внимание на характерный периодически повторяющийся звук стука колес, который в письменном виде можно передать примерно так: «Ты-дым, ты-дым». На рисунке 3 вы видите схематичное изображение вагона поезда с указанием некоторых размеров, а на рисунке 4 – визуализацию короткого фрагмента записи этого звука, сделанной в вагоне поезда. (Мы не знаем, кто записал, поскольку

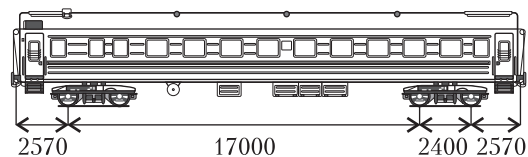


Рис. 3

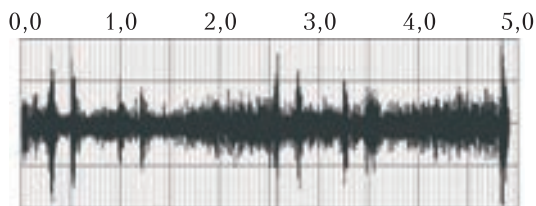


Рис. 4

ку позаимствовали этот звук на Youtube в видео под названием «8 часов сна под стук колес» от автора Faktor Zet.) Когда мы говорим «визуализация» – то имеем в виду зависимость амплитуды звуковых волн (проще говоря, громкости звука) от времени. Абсолютной тишине на графике соответствует линия, проведенная вдоль горизонтальной оси симметрии рисунка. Точки, лежащие на большом расстоянии по вертикали от этой линии, соответствуют громким звукам, а лежащие вблизи этой линии – тихим. На графике на фоне шума можно различить периодически повторяющиеся двойные пики громкости – это и есть описанные выше «ты-дым, ты-дым». Проанализируйте представленный график и определите как можно точнее скорость поезда и длину рельса.

*А.Якута, П.Крюков, А.Бычков*

**4. Погрешность плотности (7 баллов)**

В распоряжении школьника имеются рычажные весы, предназначенные для измерения массы с точностью до 10 мг, три гири массой 100 г, 20 г и 5 г, пластиковый кубик и линейка. Длины сторон кубика измерили линейкой и определили его объем, получи-

лось значение  $V = 100 \text{ см}^3 \pm 5 \text{ см}^3$ . Считается, что чашечные весы, измеряющие массу с точностью 10 мг, уравновешены, если разность масс тел, находящихся на чашах, меньше 10 мг. Предполагается, что массы гирь определены с очень высокой точностью.

С помощью данного оборудования школьник определил среднюю плотность кубика с максимально возможной точностью, а после рассчитал относительную погрешность полученного результата. Какое наименьшее и какое наибольшее значение относительной погрешности он мог получить, если известно, что масса кубика точно больше 100 г, но меньше 125 г?

*Указание.* Если в результате измерений удалось определить, что измеряемая величина  $x$  лежит в пределах диапазона  $x_{\min} < x < x_{\max}$ , то относительная погрешность измерения может быть

$$\delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$$

*А.Бычков, П.Крюков*

8 класс

**1. Кольцо с бусами (11 баллов)**

Известно, что упругие бусинки одинаковой массы, насаженные на горизонтальную спицу, по которой они могут скользить без трения, в процессе столкновения обмениваются скоростями, что схематично иллюстрирует рисунок 5.

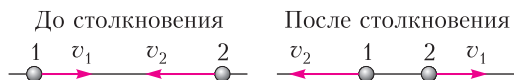


Рис. 5

Пусть на гладкое расположенное в горизонтальной плоскости кольцо радиусом 1 м насажены 4 упругие бусинки одинаковой массы (рис.6). Положение любой бусинки в любой момент времени определяется углом  $\varphi$ , который отсчитывается от линии  $OA$  против часовой стрелки и может принимать значения от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . В нулевой момент времени углы, задающие положение бусинок на кольце, равны  $\varphi_1(0) = 0^\circ$ ,  $\varphi_2(0) = 90^\circ$ ,  $\varphi_3(0) = 180^\circ$  и  $\varphi_4(0) = 270^\circ$ . Скорости бусинок в этот момент равны  $v_1 = 2\pi \text{ м/с}$ ,  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = \pi \text{ м/с}$ ,  $v_4 = \pi \text{ м/с}$

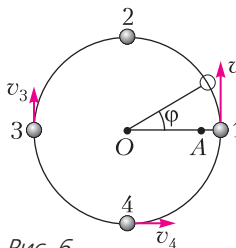


Рис. 6

и направлены так, как показано на рисунке 6.

**А. 1)** Если бы второй и четвертой бусинок не было, то как выглядел бы график зависимости угла  $\Phi_3(t)$ , определяющего положение третьей бусинки, от времени для первых двух секунд движения? (1 балл)

**2)** Изобразите график зависимости угла  $\Phi_2(t)$ , определяющего положение второй бусинки, от времени для первых двух секунд движения (на кольце четыре бусинки). (3 балла).

**В.** В какой точке кольца будет находиться через 2 секунды после начала движения первая бусинка? Сколько столкновений она испытает за это время? (2 балла)

**С.** Верно ли, что углы, характеризующие положение бусинок, а также их скорости через некоторое время  $T$  будут такими же, как в начальный момент? Если да, то найдите время  $T$ . (5 баллов)

*П.Крюков*

**2.** См. задачу Ф2658 «Задачника «Кванта» (8 баллов).

### 3. Про электросамокат (6 баллов)

В электросамокате в качестве источника энергии используется батарея литий-ионных аккумуляторов. При помощи специального устройства, которое называется контроллером, и мотора электрическая энергия, запасенная в аккумуляторе, преобразуется в механическую работу без потерь. Можно считать, что при движении с постоянной скоростью вся механическая работа совершается мотором самоката против силы сопротивления воздуха, которая пропорциональна квадрату скорости самоката. Уровень заряда батареи пропорционален электрической энергии, запасенной в аккумуляторе.

При движении на самокате со скоростью 15 км/ч по горизонтальной дороге уровень заряда батареи уменьшается от 80% до 70% за 20 минут. За какое время произойдет такое же уменьшение заряда батареи при движении со скоростью 18,9 км/ч по той же дороге на том же самокате того же самого человека, что и в первом случае?

*Пояснение.* Когда мы говорим «работа совершается против силы сопротивления воздуха», то имеем в виду, что работа сил, заставляющих самокат двигаться, равна по абсолютной величине работе силы сопротивления.

*М.Ромашка, П.Крюков*

**4.** См. задачу Ф2659 «Задачника «Кванта» (10 баллов).

*9 класс*

### 1. Дisko-шар (10 баллов)

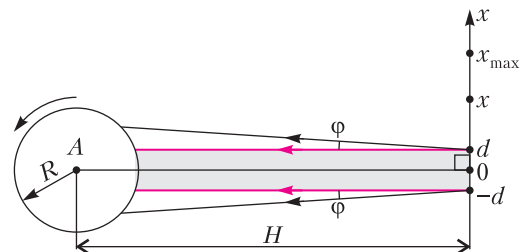
Дisko-шар – это шар с зеркальной поверхностью, состоящей из сотен или тысяч граней, каждая из которых – маленькое плоское зеркало. Обычно он подвешивается на потолке к устройству, которое равномерно вращает его вокруг вертикальной оси. Когда шар освещается прожекторами, зрители видят многочисленные отблески («зайчики»), бегущие по полу, стенам и потолку помещения (фото на рисунке 7). Зеркальные шары



*Рис. 7*

приобрели популярность в период расцвета музыкального стиля диско в конце 70-х годов 20 века, когда их стали устанавливать в залах дискотек и ночных клубов.

Пусть шар радиусом  $R$  вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (точка  $A$  на рисунке 8, вид сверху), совершая  $n$  оборотов в секунду. Расстояние от центра шара до вертикальной стены, совпадающей с горизонтальной осью  $x$ , равно  $H$ , при этом  $H \gg R$ . Шар освещается пучком параллельных лучей, который формируется прожектором, расположенным на стене на той же высоте, что и центр шара. Лучи света от прожектора идут перпендикулярно стене, поперечный размер пучка равен  $2d$ .



*Рис. 8*

Рассмотрим «зайчики», бегущие по стене на той же высоте, что и прожектор.

**А.** Чему равно максимальное значение координаты зайчика  $x_{\max}$ ? (2 балла)

**В.** Определите скорость  $v(x)$  движения «зайчика», проходящего точку с координатой  $x$ . (4 балла)

**С.** Пусть одинаковые маленькие плоские зеркала, покрывающие поверхность шара, имеют форму квадратиков с длиной стороны  $a$  ( $a \ll R$ ). Пусть пучок света прожектора, падающий на шар, имеет небольшую расходимость, определяемую углом  $2\varphi$  ( $\varphi \ll 1$ ). Оцените максимальное значение угла  $\varphi$ , при котором хотя бы в некоторых точках стены можно будет различить отдельные «зайчики». (4 балла)

*Указание.* При решении могут оказаться полезными следующие приближенные соотношения для тригонометрических функций малых углов  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1, [\alpha] = \text{рад}$ ):  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\text{tg } \alpha \approx \alpha$ .

*П.Крюков*

**2.** См. задачу Ф2657 «Задачника «Кванта» (10 баллов).

**3.** См. задачу Ф2660 «Задачника «Кванта» (8 баллов).

#### 4. Плотность мантии (6 баллов)

По существующим представлениям о строении Земли под слоем земной коры небольшой толщины находится мантия, состоящая из силикатных пород и простирающаяся примерно до глубины 2900 км, мантия окружает жидкое внешнее ядро. С небольших глубин из-за высоких давлений твердое вещество мантии начинает проявлять пластические свойства, поэтому при расчетах можно считать его жидким. На основе анализа данных о скоростях распространения сейсмических волн возникли модельные представления о распределении давления внутри Земли. В первом приближении график зависимости давления  $p$  от глубины  $h$  (при  $h \leq 3500$  км) состоит из двух линейных участков (рис. 9), при этом гравитационная сила, действующая на тело массой  $m$  со стороны Земли на глубинах до 3000 км, определяется по той же формуле, что и на поверхности:  $F = mg$ . Можно считать, что ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

Изобразите графически зависимость плотности вещества Земли от глубины, соответствующую участку прямой пропорциональности на графике давления. На сколько

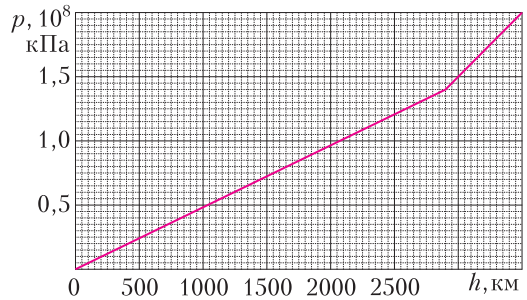


Рис. 9

изменяется плотность в точке излома графика давления?

*А.Бычков, П.Крюков*

#### 5. Планирование (9 баллов)

На крыло летательного аппарата со стороны натекающего на него потока воздуха, движущегося со скоростью  $v$  (относительно крыла), действуют силы, зависящие от скорости  $v$ : подъемная сила  $L(v)$ , ортогональная скорости, и сила сопротивления  $D(v)$ , сонаправленная скорости (рис. 10). Отноше-

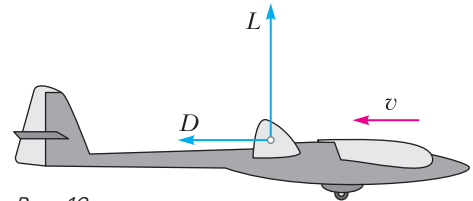


Рис. 10

ние  $K(v) = \frac{L(v)}{D(v)}$  называется *аэродинамическим качеством*. В этой задаче рассматривается полет планера (безмоторного летательного аппарата), для которого аэродинамическое качество можно считать постоянным, не зависящим от направления и величины скорости  $v$ .

Известно, что в неподвижном (относительно земли) воздухе планер может лететь, снижаясь, с постоянной скоростью, так что уменьшение высоты будет составлять 20 метров на каждый километр перемещения по горизонтали (рис. 11).

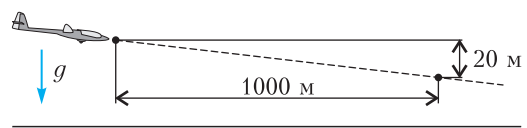


Рис. 11

Тот же планер может лететь, не снижаясь, со скоростью  $w = 20$  м/с относительно земли во встречном восходящем потоке воздуха, скорость которого относительно земли равна  $u = 5$  м/с и направлена под малым углом  $\alpha$  к горизонтالي. Найдите значение угла  $\alpha$  (см. указание к задаче 1).

П. Крюков

10 класс

1. См. задачу Ф2653 «Задачника «Кванта» (8 баллов).
2. См. задачу Ф2654 «Задачника «Кванта» (9 баллов).
3. См. задачу Ф2655 «Задачника «Кванта» (10 баллов).
4. См. задачу Ф2656 «Задачника «Кванта» (10 баллов).

### 5. Устойчивость атмосферы (13 баллов)

**А.** *Сухой адиабатой* называется такое распределение температуры  $T_a(h)$  в атмосфере Земли, что при увеличении высоты малой порции (в метеорологии их называют частицами) сухого воздуха на небольшую величину  $\Delta h$  без теплообмена с окружающими частицами ее температура изменяется на малую величину  $\Delta T_a$ . Найдите  $\Delta T_a$ , считая  $\Delta h$  известным. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Средние молярная масса и теплоемкость воздуха при постоянном объеме равны  $M = 29$  г/моль и  $c_V = 2,5R$  ( $R = 8,3$  Дж/(моль · К)) соответственно. Движением воздушных масс можно пренебречь. (6 баллов)

*Указание.* Для малых изменений параметров идеального газа ( $T, p, V$ ) или ( $T, p, \rho$ ), где  $\rho$  – плотность, из уравнения состояния следуют формулы

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V}, \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

**В.** В естественных условиях равновесное распределение температуры воздуха по высоте имеет сложный вид. Линия на графике (рис. 12) моделирует зависимость  $t(h)$ , возникшую в воздухе над городом  $X$  в день  $Y$ . В физике атмосферы принято откладывать температуру по горизонтальной оси.

Устойчивым является такое равновесное состояние воздуха в атмосфере, что при *адиабатическом* смещении частицы воздуха из положения равновесия по вертикали на небольшую величину  $\Delta h$  действующие на нее силы стремятся вернуть эту частицу в поло-

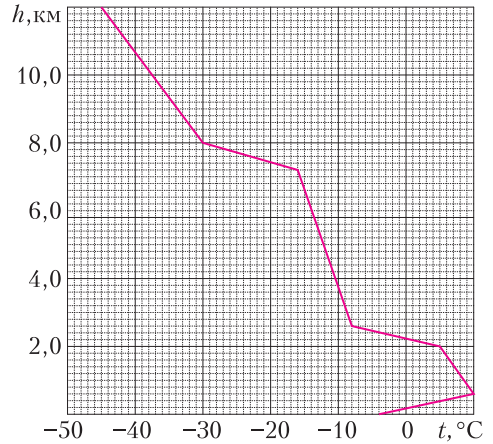


Рис. 12

жение равновесия. Укажите на графике границы (по высоте) участков устойчивой атмосферы. Воздух предлагается считать сухим, наличием паров воды и движением воздушных масс пренебречь, значения, заданные в части **А** задачи, можно считать известными. (7 баллов)

П. Крюков

11 класс

### Первый тур

#### 1. Таз на колесиках (12 баллов)

Тазик на колесиках движется под дождем по горизонтальной дороге (рис. 13). Суммарная масса капель в единице объема равна

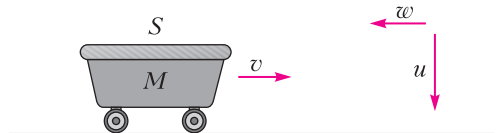


Рис. 13

$\rho$ , а их скорость вблизи поверхности земли равна  $u$ . Площадь верхнего горизонтального сечения таза равна  $S$ . В нулевой момент ( $t = 0$ ) таз пустой, его масса вместе с колесами равна  $M$ , а скорость равна  $v_0$  ( $v_0 \ll u$ ). Далее везде силой трения качения и силой сопротивления воздуха можно пренебречь.

**А.** Пусть в дне таза есть небольшое отверстие. Дождевая вода, попадая в таз, стекает на дно, распределяется по нему тонким слоем и вытекает через отверстие. Можно считать, что масса воды в тазу пренебрежимо мала по сравнению с массой таза.

1) Какое расстояние  $L_1$  пройдет таз до остановки, если капли падают вертикально? (5 баллов)



2) Подул встречный (для тазаика) ветер, так что горизонтальная составляющая скорости каплей вблизи земли оказалась равна  $w$ , а вертикальная равна  $u$ . Какое расстояние  $L_2$  пройдет тазик до остановки, если время движения равно  $t$ ? (2 балла)

**В.** В этой части задачи считается, что дырок в тазике нет, вся попадающая в таз дождевая вода остается в нем. За рассматриваемое время вода не заполняет таз целиком и не переливается через борт. Ветра нет, скорость каплей вертикальна.

1) Определите зависимость скорости таза от времени  $v(t)$  в этом случае. (2 балла)

2) Если таз проходит расстояние  $s$  к моменту, когда масса воды в нем становится равна массе таза  $M$ , то какое расстояние он пройдет к моменту, когда масса воды в нем станет равна  $3M$ ? (3 балла)

*Фольклор*

**2. Изобразите характеристику (7 баллов)**

В схеме специального источника напряжения, показанной на рисунке 14, диоды –

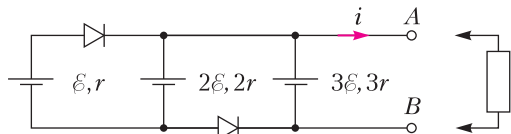


Рис. 14

идеальные (открываются при близком к нулю напряжении), значения ЭДС и внутреннего сопротивления равны  $\varepsilon = 1,5$  В и  $r = 1,0$  Ом соответственно. Изобразите графически зависимость  $i(U)$  (ВАХ источника), где  $i$  – ток, возникающий при подключении к источнику нагрузки, а  $U$  – разность потенциалов выводов  $A$  и  $B$ :  $U = \varphi_A - \varphi_B$ .

*По мотивам задачи А.Зильбермана Ф753*

**3. Токи через секунду (8 баллов)**

В схеме, показанной на рисунке 15, ключ  $K$  изначально разомкнут, конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ заряжен, а конденсатор

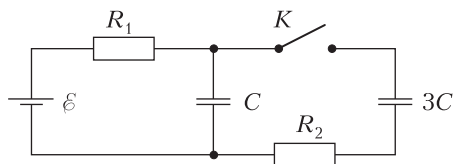


Рис. 15

емкостью  $3C$  не заряжен, ток в цепи равен нулю. Другие параметры схемы равны  $R_1 = 10$  МОм,  $R_2 = 10$  Ом,  $\varepsilon = 12$  В. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь. Ключ замыкают. Определите токи  $i_1$  и  $i_2$ , текущие через резисторы сопротивлением  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, через одну секунду после замыкания ключа.

*М.Ромашка*

**4. Рассматривая монеточку (9 баллов)**

На дне сосуда глубиной  $h$ , заполненного жидкостью с показателем преломления  $n$ , в точке с координатами  $(0, h)$  (направление осей показано на рисунке 16) располагается

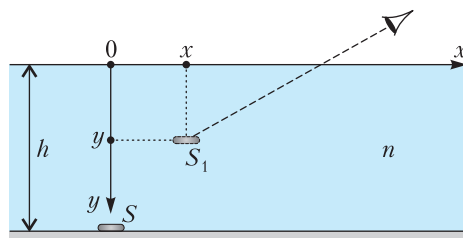


Рис. 16

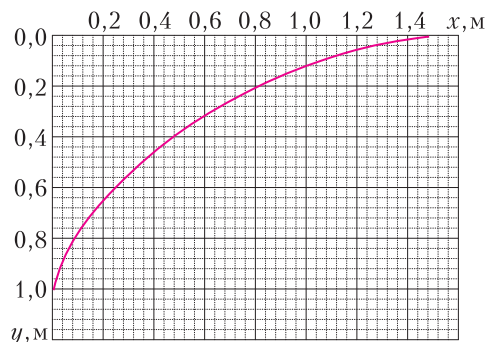


Рис. 17

монеточка  $S$ . Наблюдатель видит изображение монеточки  $S_1$  в точке с координатами  $(x, y)$ . Множество значений  $(x, y)$  для разных углов зрения изображено на графике (рис.17). Используя график, найдите показатель преломления жидкости  $n$  и глубину сосуда  $h$ .

*П.Крюков*

**5. О капле (12 баллов)**

В этой задаче рассматривается эффект уменьшения температуры капли воды вследствие испарения с ее поверхности при близких к комнатным давлению и температуре.

В одном из экспериментов шарообразная капля воды радиусом порядка миллиметра удерживалась силами поверхностного натяжения на тонкой полимерной леске. Зависимость температуры капли от времени измерялась с помощью высокоточного инфракрасного тепловизора. Вдали от капли (на «бесконечности») поддерживались постоянные значения температуры  $T_\infty$ , давления  $p_\infty$  и относительной влажности воздуха  $\varphi_\infty$ . Обнаружилось, что если в начальный момент температура капли была равна температуре на бесконечности  $T_\infty$ , то затем в течение короткого времени она уменьшалась до значения  $T_\infty - \Delta T$  ( $\Delta T$  порядка нескольких градусов) и далее длительное время оставалась постоянной. Предлагается определить величину разности температур  $\Delta T$ , учитывая диффузию пара от капли на бесконечность и тепловой поток, обусловленный разностью температур капли и воздуха на бесконечности. Конвекцией и передачей тепла по леске можно пренебречь.

В стационарном режиме в пространстве вне капли устанавливается распределение концентрации пара  $n(r)$  и температуры  $T(r)$ . В силу сферической симметрии концентрация и температура зависят только от расстояния до центра капли  $r$  и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dN}{dt} = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{dn}{dr}, \quad \frac{dQ}{dt} = -\kappa \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr},$$

где  $dN$  – количество молекул пара, проходящих за время  $dt$  через поверхность сферы радиусом  $r$ , концентрической с каплей,  $dQ$  – количество теплоты, переносимое за время  $dt$  через поверхность той же сферы; коэффициенты диффузии  $D$  и теплопроводности  $\kappa$

можно считать постоянными. Синими стрелками на рисунке 18 символически показан поток диффундирующих молекул пара.

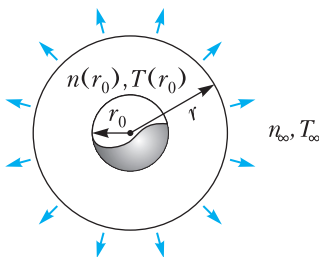


Рис. 18

**А.** Коэффициенты диффузии и теплопроводности  $D$  и  $\kappa$ , молярная масса  $M_{H_2O}$ , удельная теплота испарения воды  $L$  и радиус капли  $r_0$  считаются известными. Изменение

радиуса капли вследствие испарения можно считать незначительным.

1) Температура у поверхности капли  $T(r_0)$  и температура на бесконечности  $T_\infty$  известны.

Определите тепловой поток  $\frac{dQ}{dt}$  и распределение температуры  $T(r)$ . (3 балла)

2) Известны концентрации пара  $n(r_0)$  и  $n_\infty$ . Определите массу воды, испаряющейся с поверхности капли за малое время  $t$ . (1 балл)

3) Используя результаты пунктов 1) и 2), выразите разность плотностей пара у капли и на бесконечности  $\Delta\rho = \rho(r_0) - \rho_\infty$  через разность температур  $\Delta T = T_\infty - T(r_0)$ . (1 балл)

**В.** Отношение коэффициентов теплопроводности и диффузии в условиях задачи удовлетворяет соотношению

$$\frac{\kappa}{D} = \frac{v_B}{v_{H_2O}} \cdot \frac{c_V \rho_B}{M_B},$$

где  $v_{H_2O}$  и  $v_B$  – среднеквадратичные скорости молекул воды и воздуха,  $c_V = 2,5R$  – молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме,  $\rho_B$  – плотность воздуха. Определите отношение коэффициентов при температуре 300 К. При расчете плотности давление воздуха можно считать равным  $10^5$  Па. Универсальная газовая постоянная равна  $R = 8,3$  Дж/(моль · К), молярные массы воды и воздуха равны  $M_{H_2O} = 18$  г/моль и  $M_B = 29$  г/моль соответственно. Убедитесь в том, что при изменении температуры на 10 К отношение коэффициентов меняется незначительно. (1 балл)

**С.** Используя график зависимости плотности насыщенного пара воды от температуры, приведенный на рисунке 19, а также результаты, полученные в частях **А** и **В**, определите как можно точнее величину разности температур  $\Delta T$  для следующих значений параметров на бесконечности:  $T_\infty = 27^\circ\text{C}$ ,  $\varphi_\infty = 70\%$ .

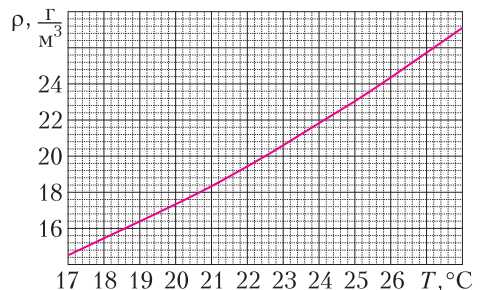


Рис. 19

Удельная теплота испарения воды и давление воздуха равны  $L = 2,4 \cdot 10^6$  Дж/кг и  $p_0 = 10^5$  Па соответственно. (6 баллов)

*Примечание.* При выполнении заданной части А

может оказаться полезной формула  $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}$ .

П.Крюков

## Второй тур

### 1. На резинках (6 баллов)

Масса горизонтально расположенного колеса, насаженного на вертикальную ось  $O$  (рис.20), равна  $m$  и равномерно распределе-

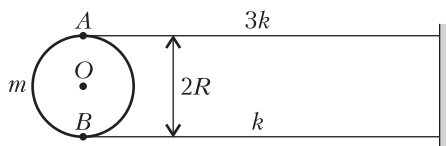


Рис. 20

но по его границе – окружности радиусом  $R$ . В точках  $A$  и  $B$ , лежащих на одном диаметре, закреплены резиновые нити жесткостью  $k$  и  $3k$ . Другие концы нитей присоединены к вертикальной стене. В положении равновесия отрезок  $AB$  располагается параллельно стене, нити не провисают, но и не деформированы, расстояние между ними равно  $2R$ .

**А.** Пусть диск может вращаться, не испытывая трения, вокруг оси. Определите период малых колебаний диска. (2 балла)

**В.** Ось вращается по часовой стрелке с достаточно большой постоянной угловой скоростью. Трение между осью и колесом сухое. Максимальный момент сил трения, действующих на колесо, равен  $M_0$  ( $M_0 \ll kR^2$ ). Сначала колесо удерживают, при этом нити остаются нерастяннутыми, потом отпускают.

1) Через какое время после этого угловая скорость колеса станет максимальной? Чему равна эта максимальная скорость? (3 балла)

2) Как изменится ответ, если ось будет вращаться против часовой стрелки? (1 балл)

П.Крюков

### 2. Похоже на сплит-систему (7 баллов)

Тепловая машина комнатной сплит-системы работает по обратному циклу Карно, при этом можно считать, что температуры в комнате и на улице соответствуют температурам на изотермах цикла. Летом, когда

температура за окном равна  $+27^\circ\text{C}$ , сплит-система, работая в режиме кондиционирования (как холодильный агрегат), поддерживает в комнате температуру  $+17^\circ\text{C}$  и потребляет от электросети среднюю мощность  $N_1$ . В начале зимы, когда температура на улице опускается до  $-3^\circ\text{C}$ , в сплит-системе включается режим теплового насоса, и она поддерживает в комнате ту же температуру  $+17^\circ\text{C}$ , что и летом, потребляя среднюю мощность  $N_2$ . Можно считать, что тепловой поток (через окна и стены) пропорционален разности температур в комнате и на улице с одинаковым коэффициентом пропорциональности летом и зимой. Найдите отношение мощностей  $n = \frac{N_2}{N_1}$ , потребляемых сплит-системой при работе в разных режимах.

П.Крюков

### 3. Шлирен-метод (9 баллов)

Для фотографирования оптических неоднородностей в прозрачных средах часто применяют *шлирен-метод*. На фотографии (рис.21; Flickr.com, авт. Phil Taylor) можно



Рис. 21

видеть потоки горячего воздуха, порождаемые пламенем газовой горелки и обтекающие ладонь человека.

Шлирен-метод может быть реализован по схеме, изображенной на рисунке 22. Две тонкие линзы  $L_1$  и  $L_2$  располагаются так, что их оптические оси совпадают. В фокусе одной линзы, в точке  $F_1$ , находится точечный источник света, а в фокальной плоскости другой линзы (точка  $F_2$ ) находится *нож Фуко* – большой непрозрачный экран  $K$  с острой кромкой, выступающей над уровнем оптической оси на небольшое расстояние  $h$ . Фокальная плоскость объектива фотоаппарата совпадает с фокальной плоскостью линзы  $L_2$ .

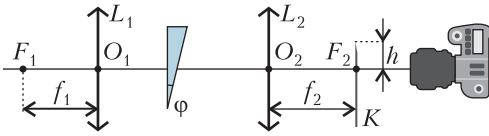


Рис. 22

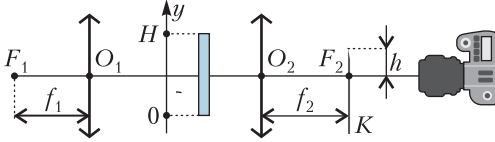


Рис. 23

**А.** Пусть между линзами располагается призма с малым преломляющим углом  $\varphi$  и показателем преломления  $n$  (см. рис.22). Фокусное расстояние линзы  $L_2$  равно  $f_2$ . При каких значениях  $h$  на фотографии будет виден только серый фон? (3 балла)

**В.** Призму заменяют на плоскопараллельную пластинку (рис.23) толщиной  $d$  и высотой  $H$  ( $d \ll H$ ), показатель преломления которой линейно зависит от координаты  $y$  по закону  $n(y) = n_0 \left(1 + \frac{\alpha y}{H}\right)$ , значения  $n_0$  и  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ) считаются известными. При каких значениях  $h$  в этом случае на фотографии будет виден только серый фон? (5 баллов)

**С.** Коротко объясните (два-три предложения), почему на фотографии (см. рис.21) ладонь и горелка темные, потоки воздуха светлые, а также почему все изображения видны на фоне серого круга. (1 балл)

*П.Крюков*

**4. Магнитная зарядка** (12 баллов)

Аккумулятор с ЭДС  $\varepsilon$ , внутреннее сопротивление которого можно считать равным нулю, заряжают в цепи, изображенной на рисунке 24. Диодный мост состоит из идеальных диодов, открывающихся при нулевом напряжении. катушка индуктивностью  $L$  располагается в области периодически

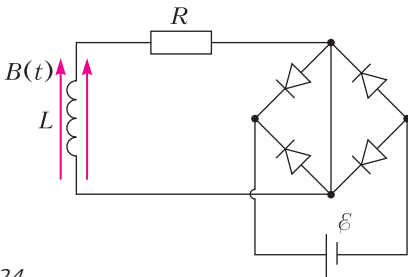


Рис. 24

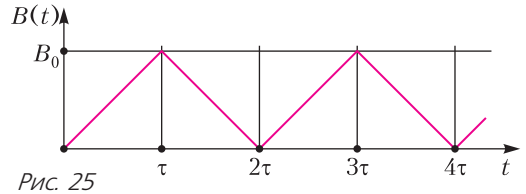


Рис. 25

изменяющегося магнитного поля  $B(t)$ . Можно считать, что сопротивление катушки и подводных проводов сосредоточено в резисторе сопротивлением  $R$ . катушка намотана на сердечник в виде полого цилиндра сечением  $S$  и содержит  $N$  витков. Внешний радиус катушки незначительно отличается от внутреннего. Индукция магнитного поля  $B(t)$ , создаваемого внешними источниками, направлена вдоль оси катушки. Можно считать, что внутри сердечника поле однородно. Фрагмент зависимости индукции поля от времени показан на графике (рис.25). Постоянные  $B_0$  и  $\tau$  считаются известными, при этом их значения таковы, что схема может обеспечить зарядку аккумулятора за конечное время.

**А.** Известно, что параметры схемы удовлетворяют соотношению  $\frac{L}{R} \ll \tau$ . Определите заряд, протекающий через аккумулятор за время  $t_0$ . (4 балла)

**В.** Пусть сопротивление  $R$  настолько мало, что выполняется условие  $\frac{L}{R} \gg \tau$ . Найдите средний ток, текущий через аккумулятор спустя длительное время после начала зарядки. (8 баллов)

*М.Ромашка, П.Крюков, А.Бычков*

**5. Ворота** (18 баллов)

Механизм, при помощи которого производится подъем откидных ворот гаража, изображен на рисунке 26, при этом ворота  $ABC$  находятся в вертикальном положении (закрыты). Прикладывая силу к ручке, расположенной у нижнего края ворот в точке  $A$ , можно перевести ворота в горизонтальное положение (открыть). При подъеме ворот ролик  $C$ , закрепленный на их верхнем крае, движется по горизонтальным направляющим. В точке  $B$  ( $AB = BC = L$ ) ворота шарнирно соединены с коромыслом, которое может вращаться вокруг неподвижной оси  $O$ . На другом конце коромысла находится груз массой  $m = 25$  кг. Ворота можно счи-

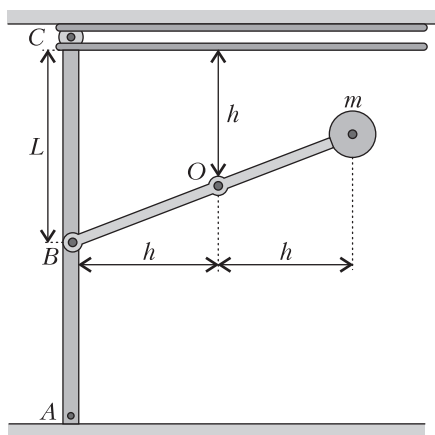


Рис. 26

тать тонкой однородной пластиной массой  $M = 30$  кг. Массой коромысла и ролика, любыми видами трения, а также линейными размерами ролика и груза можно пренебречь. Ускорение свободного падения и значения параметров, указанных на рисунке, равны  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $L = 92 \text{ см}$ ,  $h = 65 \text{ см}$ . В верхнем положении ворота фиксируются защелкой.

А. 1) Какую силу  $F_1$ , перпендикулярную воротам, необходимо прикладывать к ручке, чтобы удерживать ворота неподвижно при горизонтальном положении коромысла? (2 балла)

2) Какую минимальную (!) силу  $F_2$  необходимо прикладывать к ручке, чтобы ворота оставались неподвижными при горизонтальном положении коромысла? (4 балла)

В. Пусть при очень медленном подъеме ворот из начального вертикального положения в конечное горизонтальное к ручке в каждый момент времени прикладывается минимальная необходимая для подъема сила. Чему равно максимальное значение  $F_{\text{max}}$  этой минимальной силы? (8 баллов)

С. Если в верхнем положении открыть защелку, то ворота начнут двигаться вниз, а коромысло – поворачиваться. Определите скорость нижней точки ворот в момент, когда она коснется земли. (4 балла)

*М.Ромашка, П.Крюков, А.Бычков*

*Публикацию подготовил П.Крюков*

## ИНФОРМАЦИЯ

### ЗАОЧНАЯ ШКОЛА СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗФМШ НГУ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ. В ЗФМШ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗФМШ приглашаются в Летнюю школу СУНЦ НГУ, которая проходит в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа. По результатам обучения в Летней школе проводится зачисление в СУНЦ НГУ.

Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускника Заочной школы СУНЦ НГУ.

Учителя общеобразовательных учреждений могут организовывать группы учащихся

и проводить факультативные занятия по программам ЗФМШ, используя полученные методические материалы.

Всю подробную информацию можно найти на сайте ЗФМШ

<https://sesc.nsu.ru/education/zfmsh>

Наш почтовый адрес:

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11/1,  
Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон: +7 (383) 363-40-66

E-mail: [zfmsh@yandex.ru](mailto:zfmsh@yandex.ru)

### Первые задания на 2021/22 учебный год

Необходимо прислать решенное задание того класса, в котором будете учиться в Заочной школе.

### Математическое отделение

#### 5 класс

1. Если у заданного прямоугольника одну из сторон увеличить на 9 см, то получим прямоугольник с новыми сторонами, площадь которого на  $90 \text{ см}^2$  больше площади



заданного прямоугольника. Если же у заданного прямоугольника вторую сторону увеличить на 9 см, то получим прямоугольник с новыми сторонами, площадь которого на  $180 \text{ см}^2$  больше площади заданного прямоугольника. Найдите площадь заданного прямоугольника.

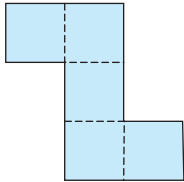


Рис. 1

2. Изображенную на рисунке 1 и составленную из пяти квадратов фигуру разрежьте на четыре одинаковые части.

3. Из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 2 ч в 5 км от пункта  $B$ .

Если бы каждый пешеход шел со скоростью на  $1 \text{ км/ч}$  больше, то их встреча произошла бы на полчаса раньше в  $6,75 \text{ км}$  от пункта  $A$ . Найдите расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ .

4. К числителю и знаменателю заданной дроби прибавили по числу 1 и получили новую дробь, которая на  $\frac{1}{30}$  больше заданной дроби. Найдите какую-нибудь из таких дробей.

5. Найдите сумму всех двузначных чисел, у которых обе цифры четные.

6. Имеется 25 монет по 1 коп., 5 монет по 5 коп., 2 монеты по 10 коп., 1 монета по 20 коп. Каким числом способов из этих монет можно составить сумму в 25 коп.?

#### 6 класс

1. Если у заданного прямоугольника одну из сторон увеличить на 5 см, то получим прямоугольник с новыми сторонами, площадь которого в 2,5 раза больше площади заданного прямоугольника. Если же у заданного прямоугольника вторую сторону увеличить на 5 см, то получим прямоугольник с новыми сторонами, площадь которого в 1,5 раза больше площади заданного прямоугольника. Найдите площадь заданного прямоугольника.

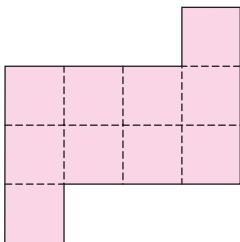


Рис. 2

2. Изображенную на рисунке 2 и составленную из десяти квадратов фигуру разрежьте на четыре одинаковые части.

3. Из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 2 часа. Если бы каждый пешеход шел со скоростью на  $1 \text{ км/ч}$  больше, то они встретились бы через 1,5 часа. Найдите расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ .

4. К числителю и знаменателю заданной дроби прибавили по числу 1 и получили новую дробь, которая на  $\frac{1}{72}$  больше заданной дроби. Найдите какую-нибудь из таких дробей.

5. Найдите сумму всех двузначных чисел, у которых обе цифры нечетные.

6. Имеется 30 монет по 1 коп., 6 монет по 5 коп., 3 монеты по 10 коп., 1 монета по 20 коп. Каким числом способов из этих монет можно составить сумму в 30 коп.?

#### 7 класс

1. Три заданные прямые проведены так, что делят плоскость на шесть частей. Четвертая прямая проводится так, что пересекает заданные прямые в трех различных точках. На какое число частей разделят плоскость все четыре прямые?

2. У прямоугольника со стороной 4 см число, равное площади в квадратных сантиметрах, в 1,5 раза больше числа, равного периметру прямоугольника в сантиметрах. Найдите площадь этого прямоугольника.

3. Из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 2 часа на расстоянии 1 км от середины пути. Если бы каждый из них шел на  $1 \text{ км/ч}$  быстрее, то они встретились бы на расстоянии 750 м от середины пути. Найдите расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ .

4. Найдите количество четырехзначных натуральных чисел, у которых все цифры четны.

5. Пусть  $a_1$  – натуральное число, которое не делится на 3. Второе число  $a_2$  получают как сумму числа  $a_1$  и суммы его цифр. Третье число  $a_3$  получают как сумму числа  $a_2$  и суммы его цифр и так далее. Докажите, что в этой последовательности ни одно из чисел не делится на 3.

6. Представьте число 677 в виде суммы  $a_1 \cdot 3^{k_1} + a_2 \cdot 3^{k_2} + a_3 \cdot 3^{k_3} + \dots + a_m \cdot 3^{k_m}$ , где  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  – различные неотрицательные целые числа, а каждое из чисел равно либо числу 1, либо числу  $-1$ .

8 класс

1. Решите уравнение  $|x + 1| = |x^2 - x - 6| + 1$ .
2. Если ученик треть пути идет шагом, а остальную часть пути бежит, то на весь путь он тратит 15 мин. Если же ученик 0,2 пути идет шагом, а остальную часть пути бежит, то на весь путь он тратит 16 мин. За какое время ученик этот путь преодолеет бегом?

3. Три равные окружности  $S_1, S_2, S_3$  попарно касаются друг друга:  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $A$ ;  $S_1$  и  $S_3$  в точке  $B$ ;  $S_2$  и  $S_3$  в точке  $C$  (рис.3). Прямая  $AB$  пересекает окружность  $S_3$  в точке  $K$  и окружность  $S_2$  в точке  $L$ . Прямая  $KC$  пересекает окружность  $S_2$  в точке  $M$ . Докажите, что треугольник  $KLM$  прямоугольный.

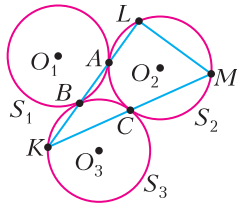


Рис. 3

4. Докажите тождество

$$a + a \left( \frac{2-a}{a+1} \right)^3 + \left( \frac{1-2a}{a+1} \right)^3 = 1.$$

5. Докажите, что сумма квадратов девяти последовательных натуральных чисел делится на 3.
6. Найдите произведение всех делителей числа  $10^6$ , включая число 1 и само число  $10^6$ .

9 класс

1. Если ученик первую часть пути от дома до школы идет шагом, а остальную часть пути бежит, то на весь путь он тратит 22 мин. Если же ученик первую часть этого пути бежит, а остальную часть пути идет шагом, то на весь путь он тратит 16 мин. За какое время ученик доберется от дома до школы, если половину этого пути он будет идти шагом, а другую половину пути будет двигаться бегом?

2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнения  $x^2 - x + a = 0$  и  $2x^2 + x + a + 1 = 0$  имеют общий корень.

3. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AK$  и  $BL$  пересекаются в точке  $H$ , точки  $M$  и  $N$  – середины высот  $AK$  и  $BL$  соответственно (рис.4). Докажите, что

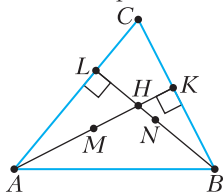


Рис. 4

$$AM^2 - MH^2 = BN^2 - NH^2.$$

4. Докажите тождество

$$p^3 + \left( p^3 \frac{2-p^3}{p^3+1} \right)^3 + \left( \frac{1-2p^3}{p^3+1} \right)^3 = 1.$$

при  $p \neq -1$ .

5. Найдите количество всех трехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых цифры справа налево строго убывают.
6. Найдите пять различных натуральных чисел таких, что произведение двух наибольших из этих чисел на 16 больше суммы всех пяти чисел.

10 класс

1. Найдите все числа  $b$  такие, что выполняется равенство  $3^{b^9} = 9^{b^3}$  (запись  $a^{b^c}$  – сокращение записи  $a^{(b^c)}$ ).
2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнения  $x^2 - (a-1)x + 2 = 0$  и  $2x^2 - (a+1)x + 2 = 0$  имеют общий корень.

3. В треугольнике  $ABC$ , у которого угол  $ABC$  равен  $120^\circ$ , проведены биссектрисы  $BK$  и  $CL$  (рис.5). Докажите, что в данном случае отрезок  $KL$  является биссектрисой треугольника  $AKB$ .

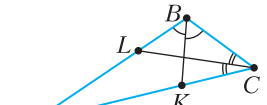


Рис. 5

4. Каким числом способов можно расставить в шеренгу пять пар близнецов, чтобы каждые два близнеца находились рядом друг с другом?
5. Найдите натуральное число  $n$ , при котором выражение  $\frac{(\sqrt{2021})^n}{n!}$  принимает наибольшее значение.

6. Найдите пять различных натуральных чисел таких, что произведение двух наибольших из этих чисел на 16 больше суммы всех пяти чисел.

11 класс

1. В выражении  $(1 + x + x^3)^{20}$  раскрыли скобки и привели подобные. Какой коэффициент будет у одночлена  $x^5$ ?

2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнения  $(a-1)x^2 + 5x + 2 = 0$  и  $ax^2 + 7x + 2 = 0$  имеют общий корень.

3. В треугольнике  $ABC$ , у которого  $AB < BC$ , точка  $M$  – середина стороны  $AC$  и точка  $D$  на стороне  $BC$  отмечена так, что  $BD = AB$

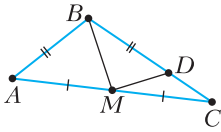


Рис. 6

(рис.6). Найдите величину угла  $ABC$ , если известно, что  $\angle ABM = 57^\circ$ ,  $\angle BMD = 90^\circ$ .

4. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  все ребра равны 1. Найдите площадь ортогональной проекции пирамиды на плоскость боковой грани  $SAB$ .

5. Найдите количество всех видов равнобедренных трапеций с целочисленными сторонами, периметр каждой из которых равен 30.

6. Представьте выражение  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{4 \cos x - 3 \sin x}$  в виде  $a + b \operatorname{tg}(x + \varphi)$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi$  — фиксированные числа.

### Физическое отделение

#### 7 класс

1. Окно в комнате закрыто плотными шторами, в которых есть небольшое отверстие. Солнце светит прямо в окно. Оцените скорость движения светлого пятна по стене, расположенной напротив окна.

2. Измерьте, какой путь вы проходите при спуске по лестнице из вашей квартиры на улицу и на сколько метров опускаетесь. Оцените погрешность измерений.

3. Велосипедист и пешеход одновременно отправились в соседний город, находящийся на расстоянии 20 км. По пути велосипедист остановился пообедать, и в итоге в соседний город они прибыли тоже одновременно. Сколько времени продолжался обед? Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода 6 км/ч.

4. Велосипедист, движущийся со скоростью 20 км/ч, обгоняет стоящий на остановке электропоезд за 36 с. При какой скорости электропоезда тот обгонит продолжающего двигаться с той же скоростью велосипедиста за 12 с?

5. Катер проходит расстояние 20 км вниз по течению за 48 мин, а против течения за 1 ч 20 мин. Чему равна скорость катера в спокойной воде?

#### 8 класс

1. С какой скоростью должен лететь самолет вдоль 60-й параллели, чтобы пассажир видел Солнце на одной и той же высоте над горизонтом?

2. Если в ведро с водой поместить шесть деревянных кубиков, вода начинает переливаться через край. Сколько камней той же массы можно поместить в ведро, чтобы вода не переливалась? Плотность камня 2500 кг/м<sup>3</sup>.

3. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вычерпать воду из наполненного доверху кубического бака с ребром 2 м? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

4. Оцените, какая средняя тепловая мощность выделяется в вашем теле при спуске по лестнице.

5. Пешеход, велосипедист и автомобиль одновременно отправились в соседний город. Велосипедист прибыл раньше пешехода на 1 ч, а автомобиль опередил пешехода на 1 ч 15 мин. Скорость пешехода 6 км/ч. Определите скорость велосипедиста, если известно, что она вчетверо меньше скорости автомобиля.

#### 9 класс

1. Два автомобиля прошли одну дистанцию пути. Они одновременно вышли из исходного пункта и одновременно через 1 ч 20 мин пришли в конечный пункт, причем первый автомобиль первую, меньшую часть времени шел со скоростью  $v_1 = 100$  км/ч, а оставшуюся, большую — со скоростью  $v_2 = 60$  км/ч. Второй автомобиль, напротив, сначала двигался со скоростью  $v_2$ , а затем шел со скоростью  $v_1$ . Определите протяженность пути, если наибольшая дистанция между автомобилями в процессе их движения составляла  $s = 20$  км.

2. Экспериментатор придал проволоке форму зигзага, образованного равными прямолинейными отрезками, повернутыми на угол  $90^\circ$  друг к другу (рис.7). Затем он должен был отрезать фрагмент проволоки ровно посередине отрезков. У экспериментатора не оказалось линейки, чтобы наметить точки отреза, зато нашелся оммметр. Он наметил такие точки  $A$  и  $B$ , что сопротивление зигзагообразной проволоки между ними уменьшалось в известное ему число раз после замыкания их прямолинейным отрезком



Рис. 7

той же проволоки. Во сколько раз должно было уменьшиться сопротивление?

**3.** В цилиндрической колбе линза льда плавает поверх слоя воды, прилегая к стенкам колбы. Колба нагревается горелкой, сообщая ей тепловую мощность  $N = 100$  Вт. Определите скорость движения верхней границы льда. Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_l = 900$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330$  кДж/кг, площадь основания колбы  $S = 50$  см<sup>2</sup>. Считайте, что температура воды и льда 0 °С.

**4.** Для того чтобы подключить мощный электроприбор к розетке, пришлось использовать два последовательно соединенных удлинителя. Первый содержал медный провод с площадью сечения  $S_1 = 1,5$  мм<sup>2</sup>, второй – такой же провод с сечением  $S_2 = 0,75$  мм<sup>2</sup>. После кратковременного включения электроприбора проводящая жила провода первого удлинителя нагрелась на  $\Delta T_1 = 5$  °С. На сколько нагрелась проводящая жила провода второго удлинителя? Обменом тепла между проводником и изоляционным покрытием провода пренебречь.

**5.** На дне пустой цилиндрической колбы стоит цилиндр (рис.8). В колбу начали с

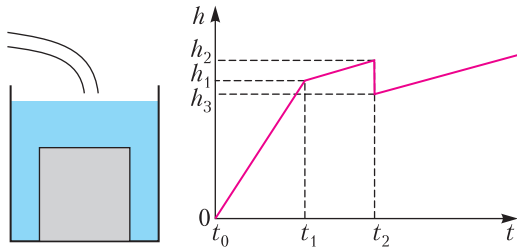


Рис. 8

Рис. 9

постоянным расходом наливать воду. Через некоторое время прилипший ко дну цилиндр оторвался от дна и всплыл. Выразите плотность материала, из которого сделан цилиндр, через приведенные на графике (рис.9) данные зависимости высоты уровня воды в колбе от времени и плотность воды  $\rho_0$ .

10 класс

**1.** Решите задачу 1 для 9 класса.

**2.** Автомобиль начал движение с постоянным ускорением, затем, достигнув некоторой скорости, шел с этой скоростью. За время  $t$  от начала движения он прошел путь

$s$ , за  $2t$  – путь  $3,5s$ . Определите максимальную скорость автомобиля.

**3.** На наклоненную под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонтали поверхность ледяной горки одновременно на расстоянии  $l = 15$  м друг от друга ступили два мальчика. Сколько времени маленький мальчик, расположенный ниже по склону, может оставаться неподвижным, вытягивая веревку, которую держит большой мальчик, расположенный выше? Масса большого мальчика  $M = 40$  кг, маленького  $m = 20$  кг, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, трения нет.

**4.** Решите задачу 5 для 9 класса.

**5.** Каретка скользит со скоростью  $v$  без трения вдоль горизонтальной оси. К каретке нитью длиной  $l$  прикреплен груз, который при движении каретки сохраняет вертикальное направление нити (рис.10). На какой максимальной угол отклонится груз на нити после того, как каретка упруго ударится о препятствие? Массы груза и каретки одинаковые. Ускорение свободного падения  $g$ .

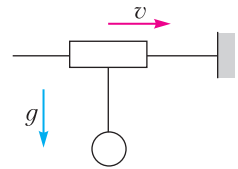


Рис. 10

11 класс

**1.** Из окна в сторону соседнего дома Петя бросил камешек. Из окна соседнего дома, точно расположенного напротив Петинного окна, Степа бросил другой камешек. Ни тот, ни другой камешек не долетел до цели, потому что они столкнулись в полете в точке на расстоянии  $1/3$  от первого дома на высоту  $h$  ниже места бросания. Определите начальные скорости камешков. Расстояние между домами  $L$ . Камешки бросали горизонтально.

**2.** Закрытая снизу и смонтированная вертикально труба разделена пополам вентиляем (рис.11). В нижнем закрытом отсеке трубы находился воздух при атмосферном давлении  $p_0 = 10^5$  Па, в верхний открытый отсек доверху налили воды. Через неплотно закрытый вентиль вода начала медленно просачиваться и капать в нижний отсек. Процесс прекратился, когда вода поровну поделлась между отсеками. Определите высоту трубы. Плотность

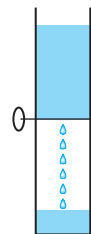


Рис. 11

воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Объемом вентиля пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. Брусок положили на наклонную плоскость и отпустили – он в течение времени  $t_1$  скользил вниз, упруго ударился о барьер и вновь начал подниматься, затратив на подъем до высшей точки время  $t_2$ . Через какое время после первого удара брусок вновь ударится о барьер?

4. Бусинка надета на горизонтальную спицу и с помощью резинки прикреплена к точке, расположенной на расстоянии от спицы, равном недеформированной длине резинки (рис.12). Если в точке

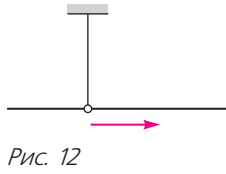


Рис. 12

равновесия бусинке сообщить скорость  $v$ , достигается максимальное отклонение резинки, при котором она образует со спицей угол  $\alpha = 60^\circ$ . Когда бусинке в точке равновесия сообщили скорость  $8v$ , резинка порва-

лась при угле  $\beta = 30^\circ$  по отношению к спице. Определите скорость, с которой бусинка продолжила движение после разрыва резинки. Резинка подчиняется закону Гука вплоть до момента ее разрыва. Трения нет. Резинка невесомая.

5. Два бруска одинаковой массы неподвижно лежат на расстоянии  $L = 1 \text{ м}$  друг от

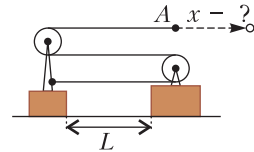


Рис. 13

друга на горизонтальном столе (рис.13). На каждом бруске смонтирован невесомый блок. Через блоки переброшена нерастяжимая и невесомая нить, прикрепленная одним концом к левому бруску. На какое расстояние нужно, не ослабляя нить, переместить ее свободный конец  $A$ , чтобы бруски столкнулись друг с другом? Бруски не переворачиваются. Трения нет.

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №5)

1. Ответ показан на рисунке 1.
2.  $50^\circ$ .

Рассмотрим пятиугольник, выделенный красным цветом (рис.2). Сумма его углов равна

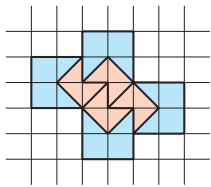


Рис. 1

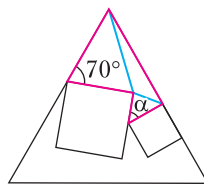


Рис. 2

$180 \times 3 = 540^\circ$  (как и сумма углов любого пятиугольника) – это можно доказать, разрезав его диагоналями на 3 треугольника (на рисунке эти диагонали выделены синим), сумма углов каждого из которых равна  $180^\circ$ . Углы этого пятиугольника:  $70^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 270^\circ$  и  $\alpha$ , значит,  $\alpha = 540 - (70 + 60 + 90 + 270) = 50^\circ$ .

3. Пусть в незаполненной клетке первой строки стоит число  $x$ . Последовательно заполним еще несколько клеток (рис.3), в правом верхнем углу клетки будем писать, какой по счету мы ее заполнили. Сумма чисел первой строчки равна

|       |       |   |         |
|-------|-------|---|---------|
| 1     | $x^1$ | 6 | 3       |
|       | 2     | 2 | 8       |
|       | 7     |   | 4       |
| $7^4$ | $1^2$ | 7 | $x-5^3$ |

Рис. 3

$10 + x$ , а значит, такова и сумма чисел любого ряда. Рассмотрим второй столбец – зная сумму чисел в нем, мы можем теперь заполнить его нижнюю клетку – там стоит число  $10 + x - x - 2 - 7 = 1$ . Аналогично поступим с четвертым столбцом и впишем в его нижнюю клетку  $x - 5$ . Наконец, рассмотрев нижнюю строку, таким же образом найдем искомое число: это 7.

4. а) Нет; б) да, 2021.

а) Заметим, что  $KE$  и  $KС$  заменяют разные числа, но от их перестановки произведение  $УЧУЙ$  не изменится. Значит, для каждого решения ребуса есть парное, где цифры, соответствующие  $E$  и  $C$ , поменяны местами. Поэтому однозначно восстановить решение, задуманное фокусником, не получится.

б) После увеличения всех цифр на 1 получилось снова решение ребуса, значит,  $УЧУЙ + 1111 = (KE + 11)(KC + 11) = KE \cdot KC + 11 \cdot KE + 11 \cdot KC + 11 \cdot 11$ .



Поскольку при этом  $УЧУЙ = KE \cdot KC$ , получаем, что

$$1111 = 11 \cdot KE + 11 \cdot KC + 11 \cdot 11,$$

$$101 = KE + KC + 11,$$

$$KE + KC = 90,$$

т.е.

$$10 \cdot K + E + 10 \cdot K + C = 90,$$

$$20 \cdot K + E + C = 90.$$

Заметим, что  $E + C$  — это число от 1 до 17, а значит,  $20 \cdot K$  — число от 73 до 89, которое делится на 20. Тогда  $20 \cdot K = 80$  и  $K = 4$ , а  $E + C = 10$ .

Цифры  $E$  и  $C$  — разные, ни одна из них не равна 4, а также ни одна из них не равна 9 (иначе бы при добавлении 1 к каждой цифре произошел бы переход через десяток, который изменит ровно одну из цифр на месте букв  $У$  или  $К$ , и итог не будет решением ребуса). Для равенства  $E + C = 10$  остается только два варианта:  $2 + 8$  и  $3 + 7$ . Тогда  $KE \cdot KC = 42 \cdot 48 = 2016$  или  $KE \cdot KC = 43 \cdot 47 = 2021$ . Но в слове  $УЧУЙ$  совпадают первая и третья буква, а значит, подходит только вариант  $УЧУЙ = 2021$ .

### Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №4)

**29.** Да.

Так как все числа нечетны и их сумма нечетна, то и их количество нечетно. Значит, сторона таблицы состоит из нечетного числа клеток:  $2k + 1$ . Тогда всего клеток в таблице  $4k^2 + 4k + 1$ . Так как сумма всех чисел равна 1, среди них единиц на одну больше, чем минус единиц. Следовательно, минус единиц  $2k^2 + 2k$  — четное число. Поэтому произведение всех чисел равно 1. **30.** Могло.

Рассмотрим невыпуклый четырехугольник  $ABCD$  с вершинами в точках  $(0;0)$ ,  $(3;0)$ ,  $(a;a)$ ,  $(0;3)$  и выберем  $K, L, M, N$  так, что  $AK : KB = BL : LC = 2 : 1$ ,  $CM : MD = DN : NA = 1 : 2$  (рис. 4).

Возьмем  $a$  очень маленьким. Площадь  $ABCD$

будет тогда почти нулевой. При этом четырехугольник  $KLMN$  будет близок к трапеции с вершинами в точках  $(2;0)$ ,  $(1;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(0;2)$ , и его площадь будет близка к  $3/2$ .

**31.** Нет.

Треугольники делятся на остро-

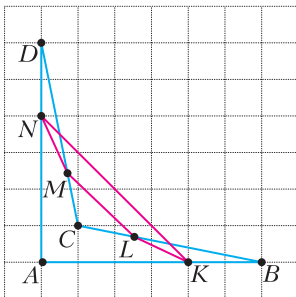


Рис. 4

угольные, тупоугольные и прямоугольные. Пусть остроугольных треугольников  $x$ , тогда тупоугольных  $2x$ , что в сумме делится на 3.

Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники. Их гипотенузы будут диаметрами окружности (так как на них опирается прямой угол), и если две точки диаметрально противоположны на окружности, то любая из 48 оставшихся точек образует с ними прямоугольный треугольник. Значит, количество прямоугольных треугольников равно  $48t$ , где  $t$  — количество диаметрально противоположных пар точек. Итак, количество прямоугольных треугольников тоже делится на 3. Значит, и общее количество треугольников делится на 3.

Но общее количество треугольников равно числу способов выбрать 3 вершины из 50:

$$C_{50}^3 = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} = 50 \cdot 49 \cdot 8,$$

что не делится на 3.

**32.**  $(n-1)!$

Заметим, что любую последовательность можно получить не более чем за  $n-1$  шагов. Сначала поставим число 1 на то место, на котором оно должно оказаться в итоге. Затем поставим на нужное место число 2 и т.д. Когда числа 1, 2, ...,  $n-1$  окажутся на своих местах, то и число  $n$  вынужденно окажется на своем месте. Значит, требуется найти количество последовательностей, которые нельзя получить меньше чем за  $n-1$  шагов.

Каждой возможной последовательности поставим в соответствие ориентированный граф с  $n$  вершинами, пронумерованными от 1 до  $n$ , в котором ребра проведены так: если на  $i$ -м месте последовательности стоит число  $j$ , то проведена стрелка из вершины  $i$  в вершину  $j$ , будем также писать  $i \rightarrow j$ ; при  $i = j$  получается петля. Так как из каждой вершины выходит одна стрелка и в каждую входит одна стрелка, то граф представляет собой объединение циклов (рис. 5).

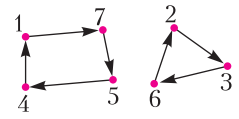


Рис. 5. Пример: граф для последовательности 7361425

Посмотрим, как преобразуется граф, когда два числа в последовательности меняются местами. Стрелки  $a \rightarrow c$  и  $b \rightarrow d$  заменяются на  $a \rightarrow d$  и  $b \rightarrow c$ . Нетрудно убедиться в том, что если две стрелки были из одного цикла, то он распадается на два цикла. А если они были в разных циклах, то при такой операции эти циклы объединятся в один. Поэтому количество циклов за один шаг изменяется ровно на 1.

Докажем, что последовательности, количество которых требуется найти в задаче, это все такие последовательности, граф которых представляет собой один цикл.

В начальной ситуации, когда все числа стоят на своих местах, такой граф представляет собой  $n$  циклов длины 1. Поэтому если в графе, соответствующем последовательности, ровно 1 цикл, то ее нельзя получить меньше чем за  $n - 1$  шагов. А если больше чем 2 цикла, то можно – ведь всегда можно сделать шаг, уменьшающий количество циклов на 1.

Осталось найти количество таких графов, в которых ровно 1 цикл. Будем рисовать этот цикл последовательно; начнем с вершины 1. Проведем из нее стрелку, это можно сделать  $n - 1$  способами. Из конца этой стрелки можно провести стрелку уже  $n - 2$  способами, чтобы не возвращаться в вершину, в которой уже были. На следующем шаге будет уже  $n - 3$  способа провести стрелку и т.д. – количество вариантов будет каждый раз уменьшаться на 1. Получим, что количество способов провести такой цикл равно  $(n - 1)!$ .

Основная часть этого решения уже обсуждалась в «Кванте»: см., например, статью «Счетчики и расстояния в графах» П. Кожевникова в №6 за 2017 г.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Длина морской мили равна длине дуги экваториальной окружности, стягивающей центральный угол, равный угловой секунде.
2. Скорость спортсмена равна 30 км/ч = 0,5 км/мин. Значит, первый километр спортсмен пробежал за 2 мин, т.е. поезд уже ушел.
3. Необходимая скорость равна 1 км/с = 3600 км/ч = 1000 м/с. Это примерно 3 скорости звука. Такой рубеж действительно преодолевают современные военные самолеты.
4. При изготовлении точной копии все размеры снеговика должны быть увеличены в 2 раза. Значит, объем копии будет в 8 раз больше объема оригинала, а масса будет равна 50 кг · 8 = 400 кг.
5. Поскольку 1 фунт ≈ 450 г, 1 дюйм ≈ 2,5 см, то давление

$$p = \frac{8mg}{S} \approx \frac{8 \cdot 0,4 \cdot 10}{(2,5 \cdot 10^{-2})^2} \text{ Па} \approx 58 \text{ кПа}.$$

6. Запишем размерности соответствующих величин в единицах СИ:

$$[\sigma] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}, [g] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = [\sigma][g].$$

Значит,  $p = \sigma g$ .

7. Выпишем размерности:  $[E] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$ ,  $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Будем искать зависимость  $v$  от  $E$  и  $\rho$  в

виде  $v = kE^\alpha \rho^\beta$ , где  $k$  – безразмерная постоянная. Из равенства размерностей левой и правой частей находим  $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $\beta = -\frac{1}{2}$ . Следовательно,  $v = k\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

8. Прочность кольца на разрыв определяется кулоновскими силами, зависящими от квадрата величины заряда. Таким образом, новый заряд  $Q = \sqrt{10}q$ .

9. Преобразуем:  $(\text{Дж/Кл}^2) \cdot \text{с} = \frac{\text{Дж/Кл}}{\text{Кл/с}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}$ .

Это размерность электрического сопротивления.

10. Из соображений размерностей потенциал в вершине кубика пропорционален отношению  $q/a$ , где  $q$  – заряд кубика,  $a$  – его ребро. Центр же кубика находится в вершинах восьми кубиков вдвое меньшего размера. Значит, потенциал в центре равен 24 В.

11. Интенсивность излучения выражается формулой  $I = \epsilon_0 E^2 c$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $E$  – напряженность электрического поля,  $c$  – скорость света. Тогда

$$[I] = \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot \left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}^2}{\text{В} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

### Микропыль

При увеличении радиуса окружности во столько же раз увеличивается длина образуемой сектором дуги, а их отношение остается неизменным – фигуры подобны друг другу. Значит, не изменится и величина угла. Такая связь, кстати, привела к мысли измерять углы не градусами, а радианами – отношениями линейных элементов тех фигур, которым принадлежат углы.

### Скрытая симметрия

1. Побеждает второй игрок.

Несложно проверить, что если бы ладьи изначально стояли на центрально симметричных клетках, то второй игрок мог бы выиграть, играя симметрично относительно центра. Пусть второй игрок мысленно переставит столбцы так, чтобы ладьи стояли симметрично (например, поменяет местами вертикали  $b$  и  $f$  между собой и горизонтали 2 и 5 между собой; рис.6). Затем он может на этой воображаемой доске ходить симметрично относительно центра доски и делать ходы в клетки с теми же координатами на исходной доске.

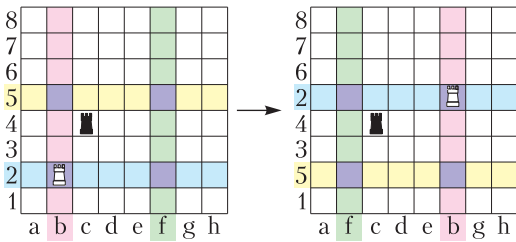


Рис. 6

**2. Побеждает второй игрок.**

Пусть первый поставил на доску первую шашку. От перестановки горизонталей доски ничего не изменяется. То же относится и к перестановке вертикалей. Поэтому будем считать, что второму игроку дополнительно разрешается менять местами любые горизонтали и вертикали. Пусть после первого хода первого игрока второй игрок переставит горизонтали и вертикали так, чтобы первая шашка оказалась в средней вертикали, но не в центре доски. Далее он может делать ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. В частности, вторая шашка тоже окажется в средней вертикали, и первый игрок не сможет занять центральную клетку. Легко проверить, что второй всегда сможет сделать симметричный ход (отдельно следует рассмотреть случай хода в среднюю горизонталь).

**3. Выигрывает Вася.**

Расположим камни, как показано на рисунке 7, где кучи соответствуют столбцам. Петя должен

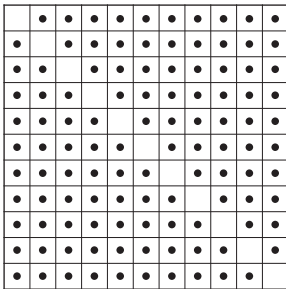


Рис. 7

брать несколько камней из одного столбца, а Вася – из разных. Стратегия Васи – делать ходы, симметричные Петиним относительно пустой диагонали. Изначально картинка симметрична. Поскольку строка, симметричная столбцу, не имеет с ним общих камней, то Вася каждый раз сможет восстанавливать нарушенную симметрию, т.е. у него всегда есть ход. Так как игра конечна, то когда-то Петя проиграет.

**LXXXIV Московская математическая олимпиада школьников**

**1. Барон не прав.**

Заметим, что  $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 9801 < 9900$ , а  $100^2 = 10000 > 9999$ . Таким образом, четырехзначных точных квадратов, начинающихся на 99, не существует, поэтому к числу 99 нельзя приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат.

**2. Поместятся.**

Разместим свечки так, как показано на рисунке 8. Докажем, что отрезок  $OA$  меньше радиуса, т.е. самые удаленные от центра точки лежат внутри круга. В самом деле,  $ABC$  – равносторонний треугольник со стороной 20 см. Тогда его высота  $AO = 10\sqrt{3}$  см  $< 18$  см, так как  $(10\sqrt{3})^2 = 300 < 324 = 18^2$ .

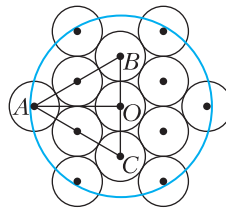


Рис. 8

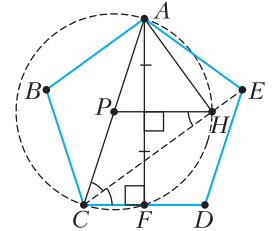


Рис. 9

**3. Угол правильного пятиугольника равен  $108^\circ$ ,**

тогда (рис.9)  $\angle ECD = \angle CED = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ , а  $\angle ACD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ . Таким образом,  $CE$  содержит биссектрису треугольника  $ACF$  и, следовательно, пересекает серединный перпендикуляр к стороне  $AF$  в точке, лежащей на описанной около этого треугольника окружности. Но  $\angle F$  прямой, значит, и  $\angle AHC$  прямой, как опирающийся на ту же дугу.

**4. За три взвешивания.**

Отметим, что взвешивание любой группы монет может показать один из трех исходов: 0, 1 или 2 легкие монеты среди взвешенных. Действительно, эти исходы соответствуют показаниям весов в  $10k$ ,  $10k - 1$  и  $10k - 2$  граммов, где  $k$  – количество монет на весах, а ничего другого при взвешивании  $k$  монет весы показать не могут.

Теперь докажем, что менее чем тремя взвешиваниями обойтись не получится. Всего пар монет, которые могут быть легкими, 24: по 3 пары соседних монет в каждой строчке и в каждом столбце. Так как одно взвешивание дает три разных исхода, то два взвешивания дадут лишь  $3^2 = 9$  различных исходов.

Покажем, как определить легкие монеты за три взвешивания.

*Первое взвешивание.* Разобьем монеты на две группы так, как показано на рисунке 10, и взвесим одну них. Так как группы симметричны, то возможны два различных случая: легкие монеты в одной группе и легкие монеты в разных группах.

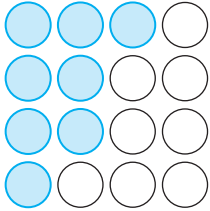


Рис. 10

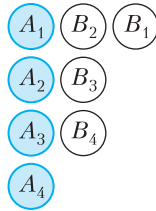


Рис. 11

1) *Первый случай* (легкие монеты в одной группе), *второе взвешивание.* Оставим на рисунке только те монеты, которые могут оказаться легкими, разобьем их на две группы и пронумеруем (рис.11). Взвесим одну из групп. Здесь возможны три случая: обе легкие монеты в группе A, обе легкие монеты в группе B, по одной легкой монете в каждой из групп.

Хотя в этом взвешивании группы не симметричны, ситуации с обеими монетами в одной группе разбираются аналогично. Возможные пары легких монет:  $(X_1, X_2)$ ,  $(X_2, X_3)$  и  $(X_3, X_4)$  соответствующей группы, где  $X$  – группа с легкими монетами. Поэтому *третьим взвешиванием* взвесим монеты  $X_1$  и  $X_2$ . Либо они обе легкие, и тогда мы их нашли, либо среди них одна легкая, и тогда легкие монеты – это  $X_2$  и  $X_3$ , либо среди них легких нет, и тогда легкие монеты –  $X_3$  и  $X_4$ . Если легкие монеты в разных группах, то это могут быть «горизонтальные» пары  $(A_1, B_2)$ ,  $(A_2, B_3)$  или  $(A_3, B_4)$ . Тогда *третьим взвешиванием* взвесим монеты  $A_1, B_2$  и  $A_2$ . Если среди них две легкие, то это  $A_1$  и  $B_2$ . Если одна, то легкие монеты – это  $A_2$  и  $B_3$ , если легких нет – то  $A_3$  и  $B_4$ .

2) *Второй случай* (легкие монеты в разных группах), *второе взвешивание.* Оставим на рисунке только те монеты, которые могут оказаться легкими, разобьем их на две группы и пронумеруем (рис.12). Взвесим одну из групп. Так как группы симметричны, то возможны два различных случая: легкие монеты в одной группе и легкие монеты в разных группах.

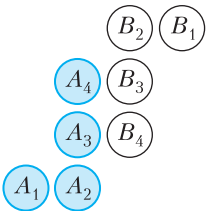


Рис. 12

Ситуация, когда обе легкие монеты в одной группе, разбирается точно так же, как и в третьем взвешивании первого случая, но монеты  $X_3$  и  $X_4$  легкими оказаться не могут.

Если легкие монеты в разных группах, то это либо пара  $(A_3, B_4)$ , либо пара  $(A_4, B_3)$ . Чтобы найти легкие монеты, третьим взвешиванием достаточно взвесить одну из этих пар.

5. Докажем общую формулу. Пусть в государстве  $2^n$  городов. Тогда министр сможет добиться желаемого не более чем за  $2^{n-2}(2^n - n - 1)$  дней.

**Лемма.** Пусть в государстве  $2k$  городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Выберем из них половину с наибольшим числом исходящих дорог. Тогда всего из выбранных городов исходит суммарно не менее  $k^2$  дорог.

**Доказательство.** Пусть из  $k$  выбранных городов исходит менее  $k^2$  дорог, тогда по принципу Дирихле найдется город, из которого исходит не более  $k - 1$  дороги. Тогда, так как выбраны города с наибольшим числом исходящих дорог, из каждого из оставшихся  $k$  городов исходит также не более  $k - 1$  дороги. Суммарно исходит менее  $k^2 + k(k - 1) = 2k^2 - k$  дорог, при том что общее

число дорог в точности  $\frac{2k(k-1)}{2} = 2k^2 - k$ . Противоречие, лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству основной формулы. Докажем ее по индукции.

*База  $n = 1$ :* между двумя городами только одна дорога, и она уже и так в одном направлении. Ничего менять не придется.

*Шаг индукции.* Пусть для  $2^n$  городов утверждение верно. Докажем для  $2^{n+1}$ . Разделим города на две группы по  $2^n$  городов. В первую группу поместим города с наибольшим количеством исходящих дорог. В соответствии с леммой из всех городов этой группы суммарно исходит не менее  $2^{2n}$  дорог.

Из этих дорог  $\frac{2^n(2^n - 1)}{2}$  – дороги внутри группы, поэтому из первой группы во вторую ведет не менее  $2^{n-1}(2^n + 1)$  дорог. Тогда из  $2^{2n}$  дорог между первой и второй группами в первую направлено не более  $2^{n-1}(2^n - 1)$ . Не более чем за  $2^{n-1}(2^n - 1)$  дней министр направит все эти дороги во вторую группу. И еще не более чем за  $2 \cdot 2^{n-2}(2^n - n - 1)$  дней он добьется того, чтобы в каждой группе нельзя было выехать из города и в него вернуться. Тогда всего потребуется не более  $2^{n-1}(2^{n+1} - n - 2)$  дней.

Так как  $32 = 2^5$ , то на осуществление желаемого министру потребуется не более  $2^3(2^5 - 5 - 1) = 208$  дней, что меньше 214 дней, оставшихся до 2022 года.

6.  $ab > a + b$ .

Рассмотрим искомое сравнение

$$ab \vee a + b.$$

Умножим его на равенство  $a/b = a - b$  (левую часть на левую, правую на правую). При умножении на положительное число (а  $a/b$  положительно) неравенство сохранится.

Получаем

$$a^2 \vee a^2 - b^2.$$

Отсюда ясно, что левая часть больше правой.

7. Предположим, что вырезать такие два квадрата Арсению не удастся. Это означает, что любые два квадрата, совпадающие по раскраске, пересекаются хотя бы по одной клетке.

Разобьем наш квадрат на 16 квадратов  $2 \times 2$ , как отмечено на рисунке 13; все они должны быть раскрашены по-разному. Так как всего разных способов раскрасить квадрат  $2 \times 2$  в два цвета ровно 16, то все раскраски среди них присутствуют по одному разу.

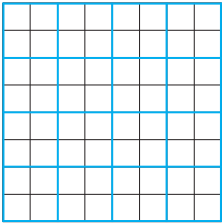


Рис. 13

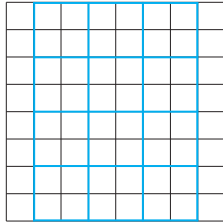


Рис. 14

Теперь выделим 12 квадратов-«потомков»  $2 \times 2$ , отмеченных на рисунке 14, каждый из которых пересекается с двумя квадратами-«родителями» первого разбиения, состыкованными горизонтально. Заметим, что каждый «потомок» совпадает по раскраске с одним из «родителей» (так как он должен совпасть с одним из квадратов первого разбиения и не может совпасть с теми, с которыми он не пересекается).

Но если два квадрата, смещенные друг относительно друга на одну клетку по горизонтали, совпадают по раскраске, то их верхние клетки должны быть одного цвета и их нижние клетки тоже одного цвета. Это дает всего четыре варианта раскраски для таких квадратов-«потомков». Но всего их 12, значит, какие-то два из них совпадут по раскраске; при этом они все попарно не пересекаются. Противоречие.

8. 1609.

Предпоследняя цифра числа равна 0, так как число без последней цифры делится на 20. Значит, число хотя бы четырехзначное. Заметим, что число, оставшееся после стирания последней цифры, не может равняться 100 по условию. Также это число не может равняться 120 и 140,

так как числа вида  $\overline{20a}$  и  $\overline{40a}$  не делятся на 21. Для 160 существует единственный пример: 1609.

9. Трапеция  $ABCD$  вписана в окружность. Ее боковая сторона вдвое меньше основания и, значит, не длиннее радиуса окружности. Поэтому боковые стороны стягивают дуги не больше чем  $60^\circ$ . А угол между диагоналями равен полусумме этих дуг.

10. Да.

Заметим, для каждого действия есть обратное ему. Поэтому если мы из ситуации  $A$ , действуя по правилам, получили ситуацию  $B$ , то из ситуации  $B$  можем получить ситуацию  $A$ , действуя по правилам.

Покажем по индукции, что если есть запас в  $n$  камней, то, действуя по вышеуказанным правилам, можно положить камень в любую клетку от 1 до  $2^n - 1$ .

База индукции:  $n = 1$ . Очевидно.

Переход индукции. Допустим, мы доказали, что при помощи запаса в  $n$  камней можно положить камень во все клетки до  $(2^n - 1)$ -й. Пусть теперь есть  $n$  черных камней и один красный камень.

Будем действовать следующим образом:

(1) Не вынимая красный камень из мешка, добьемся того, чтобы в  $(2^n - 1)$ -й клетке оказался черный камень. Это можно сделать по предположению индукции.

(2) Положим красный камень в  $2^n$ -ю клетку.

(3) Проведем операции, как в пункте (1), но противоположные и в обратном порядке. Понятно, что красный камень не помешает это сделать. В конце окажется, что все черные камни снова лежат в мешке, а на полоске ровно один камень – красный камень в клетке  $2^n$ . Договоримся, что далее мы красный камень убирать не будем.

(4) Клетки с номерами от  $2^n + 1$  до  $2^{n+1} - 1$  образуют полоску длиной  $2^n - 1$ . К ней применимо предположение индукции для  $n$  камней, так как красный камень позволяет совершать операции с самой левой клеткой этой полоски. Поэтому можно положить камень в последнюю клетку.

Таким образом, имея запас в 10 камней, можно положить камень во все клетки с номерами от 1 до  $1023 = 2^{10} - 1$ .

11. Рассмотрим  $\Delta PBC$  и внешнюю биссектрису  $XP$  угла  $BPC$ ,  $\Delta APB$  и биссектрису  $PY$  угла  $APB$ ,  $\Delta PCD$  и биссектрису  $PZ$  угла  $DPC$ ,  $\Delta APD$  и внешнюю биссектрису  $XP$  угла  $APD$ . Из свойства биссектрисы

$$\frac{BX}{XC} = \frac{PB}{PC}, \quad \frac{AY}{YB} = \frac{PA}{PB},$$

$$\frac{PD}{PC} = \frac{DZ}{ZC}, \quad \frac{PA}{PD} = \frac{AX}{XD}.$$



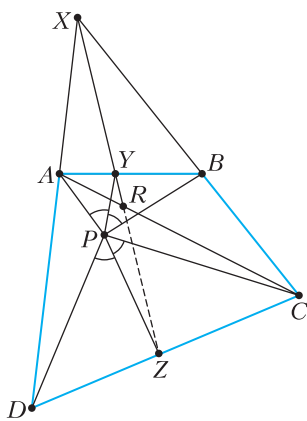


Рис. 15

Пусть прямая  $XU$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $R$  (рис.15). Используя теорему Менелая для треугольника  $ABC$  и прямой  $XUR$ , получаем

$$1 = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AY}{YB} = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{PA}{PD} = \frac{DZ}{ZC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AX}{XD}.$$

Применяя теорему Менелая для треугольника  $ACD$ , получаем, что точки  $Z, R, X$  лежат на одной прямой. Остается вспомнить, что точка  $Y$  тоже лежит на этой прямой.

**12.** Пусть такая функция существует. Тогда, подставляя  $\pi - x$  вместо  $x$  в данное равенство, получаем

$$2f(-\cos x) = f(\sin x) + \sin x.$$

Значит,  $f(-\cos x) = f(\cos x)$  при всех  $x$ , поэтому  $f(-t) = f(t)$  при всех  $t \in [-1; 1]$ , т.е. функция  $f$  четная.

С другой стороны, подставляя в исходное равенство  $-x$  вместо  $x$ , получим

$$2f(\cos x) = f(-\sin x) - \sin x,$$

а поскольку  $f$  четная, то  $f(-\sin x) = f(\sin x)$ , поэтому

$$2f(\cos x) = f(\sin x) - \sin x.$$

Вычитая это равенство из исходного, получаем  $\sin x = 0$  при всех  $x$ . Противоречие.

(Продолжение следует)

## Московская олимпиада школьников по физике 2021 года

### Заключительный этап<sup>1</sup>

7 класс

1. А.  $t_{\min} = 42,5$  мин.

В. 18:07 – 18:10, 18:22 – 18:25.

2. А.  $\rho_4 = \frac{1000 \text{ кг/м}^3}{1 \text{ м}^3} \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^4 \text{ м}^3 = 301 \text{ кг/м}^3.$

В.  $\rho_{\min} = 1000 \text{ кг/м}^3; \rho_{\max} = 2000 \text{ кг/м}^3.$

С. Одной банки не хватит, а двух более чем достаточно (одна банка позволяет покрасить  $10 \text{ м}^2$ , а две –  $20 \text{ м}^2$ ).

3.  $v = (40 \pm 5) \text{ км/ч}; l = (25 \pm 3) \text{ м}.$

4.  $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\min} = 5\%; \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\max} = 9,5\%.$

8 класс

1. А. 1) См. рис.16 (красная линия); 2) см. рис.17 (красная линия).

В.  $180^\circ; 7$  столкновений.

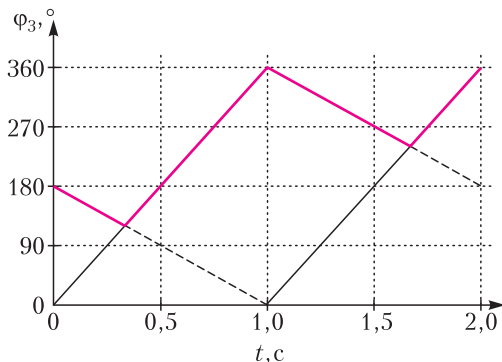


Рис. 16

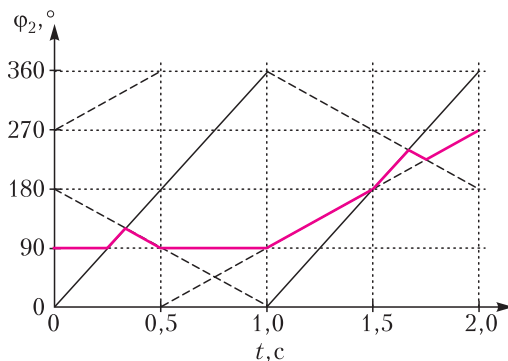


Рис. 17

<sup>1</sup> Подробные решения всех задач можно найти на сайте <http://mosphys.olimpiada.ru> (Прим. ред.)

С. Верно;  $T = 4$  с.

3.  $t_2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^3 t_1 \approx 10$  мин.

9 класс

1. А.  $x_{\max} \approx \frac{2dH}{R}$ .

В.  $v(x) = 4\pi Hn \left(1 + \frac{x^2}{H^2}\right)$ .

С. Отдельные «зайчики» наблюдаются всегда (допущена ошибка в формулировке вопроса).

4. См. рис.18;  $\rho = (4830 \pm 50)$  кг/м<sup>3</sup>;

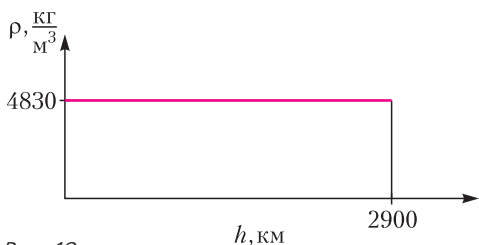


Рис. 18

$\Delta\rho = (5200 \pm 100)$  кг/м<sup>3</sup>.

5.  $\alpha = 0,1$  рад.

10 класс

5. А.  $\Delta T_a = -\frac{2Mg}{7R} \Delta h$ , где  $\frac{2Mg}{7R} \approx 10$  °С/км.

В. От 0 до 600 м, от 2000 м до 2600 м, от 7200 м до 8000 м.

11 класс

Первый тур

1. А. 1)  $L_1 = \frac{Mv_0}{\rho u S}$ ; 2)  $L_2 = \frac{Mv_0}{\rho u S} - wt$ .

В. 1)  $v(t) = \frac{Mv_0}{M + \rho u S t}$ ; 2)  $s_1 = 2s$ .

2. См. рис.19.

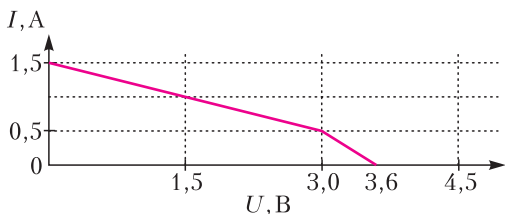


Рис. 19

3.  $i_1 \approx 0,9$  мкА;  $i_2 \approx 0,68$  мкА.

4.  $n = 1,33 \pm 0,05 \approx 1,34$ ;

$h = (1,34 \pm 0,05)$  м  $\approx 1,34$  м.

5. А. 1)  $\frac{dQ}{dt} = -4\pi\kappa r_0 (T_\infty - T(r_0))$ ,

$T(r) = T_\infty - (T_\infty - T(r_0)) \frac{r_0}{r}$ ;

2)  $m = 4\pi D r_0 t (n(r_0) - n_\infty) \frac{M_B}{N_A}$ ;

3)  $\Delta\rho = \frac{\kappa}{LD} \Delta T$ .

В.  $\frac{\kappa}{D} \approx 0,657 \cdot 10^3$  Дж/(К · м<sup>3</sup>).

С.  $\Delta T = (5 \pm 0,5)$  К.

Второй тур

1. А.  $T = \pi \left( \sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{m}{3k}} \right)$ .

В. 1)  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $\omega_{\max} = \frac{M_0}{R^2} \frac{1}{\sqrt{km}}$ ;

2)  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{3k}}$ ,  $\omega_{\max} = \frac{M_0}{R^2} \frac{1}{\sqrt{3km}}$ .

2.  $\frac{N_2}{N_1} = 4$ .

3. А.  $h > \varphi(n-1)f_2$ .

В.  $h > \frac{cn_0 d f_2}{H}$ .

С. В потоках воздуха, возникающих над пламенем, показатель преломления заметно меняется на небольшой длине. Это приводит к отклонению лучей, проходящих через область нагретого воздуха. Далее они проходят выше ножа Фуко и попадают в объектив фотоаппарата, поэтому потоки изображаются светлыми. Горелка и ладонь перекрывают путь лучам, поэтому изображаются темными. Возникновение серого круга, на фоне которого наблюдаются и горелка, и ладонь, и потоки нагретого воздуха, может быть обусловлено разными факторами. Например, реализовать точечный источник света на практике достаточно сложно, линзы могут быть неидеальными (фокус не в точке), частично материал линз может рассеивать падающий свет.

4. А.  $q_0 = \frac{B_0 N S - \varepsilon \tau t_0}{R \tau}$ .

В.  $i_{\text{ср}} = \frac{(B_0 N S)^2 - \varepsilon^2 \tau^2}{4 L B_0 N S}$ .

5. А. 1)  $F_1 \approx \frac{\sqrt{2}(M-m)g}{3} \approx 23,6$  Н;

2)  $F_2 \approx \frac{(M-m)g}{\sqrt{5}} \approx 22,4$  Н.

В.  $F_{\max} = \frac{(M-m)g}{2} = 25$  Н.

С.  $v_A = \sqrt{\frac{6gL(M-m)}{M}} \approx 3$  м/с.

## Лингвистические задачи

(см. 2-ю с. обл.)

**Задание 1.** Предложенный текст – начальная строфа первой главы «Евгения Онегина»:

|                                 |                           |
|---------------------------------|---------------------------|
| Мой дядя самых честных правил,  | Ма тата сами сини рави,   |
| Когда не в шутку занемог,       | Ката ни суку санима,      |
| Он уважать себя заставил        | Йа вуваса сипа сатавил    |
| И лучше выдумать не мог.        | Йи руси витума ни ма.     |
| Его пример другим наука;        | Йива рими руки навука;    |
| Но, боже мой, какая скука       | На, паси ма, какайка кука |
| С больным сидеть и день и ночь, | Пани сити йи ти йи на,    |
| Не отходя ни шагу прочь!        | Ни йаката ни саку ра!     |
| Какое низкое коварство          | Какайи никайи кавава      |
| Полуживого забавлять,           | Парусивава сапара,        |
| Ему подушки поправлять,         | Йиму патуки парара,       |
| Печально подносить лекарство,   | Писана панаси рикава,     |
| Вздыхать и думать про себя:     | Тика йи тума ра сипа:     |
| Когда же черт возьмет тебя!     | Ката си са вама типа!     |

**Задание 2.** Основная закономерность «новорусской» звуковой системы состоит в том, что каждый слог имеет структуру СГ, т.е. состоит из одного согласного и следующего за ним гласного. С этой закономерностью связаны следующие фонетические изменения:

- 1) согласные в конце слога выпадают;
- 2) из нескольких согласных звуков, стоящих в начале слога, остается последний (в частности, по этому правилу опускается предлог, состоящий из одного согласного звука);
- 3) перед начальным гласным слога (в том числе и в начале слова) вставляется согласный: перед [у] – [в], перед остальными – [й].

В «новорусском» языке меньше звуков, чем в русском. Это происходит за счет совпадения нескольких русских звуков в одном звуке «новорусского» языка. Группе гласных, обозначаемых на письме через *a, я, o, ё*, в «новорусском» соответствует *a*; *e, ы, и* → *u*; *y* → *y*. Для согласных звуков действуют следующие правила:

|                      |              |
|----------------------|--------------|
| <i>t, d</i>          | → <i>t</i> ; |
| <i>n, b</i>          | → <i>n</i> ; |
| <i>k, z, x</i>       | → <i>k</i> ; |
| <i>c, z, ш, ж, ч</i> | → <i>c</i> ; |
| <i>л, р</i>          | → <i>p</i> ; |
| <i>м</i>             | → <i>m</i> ; |

*n* → *n*;*v* → *v*.

Твердость/мягкость согласных могла измениться, так как в «новорусском» перед *a, y* согласные всегда твердые, перед *u* – всегда мягкие. Фонетические правила применялись к устному языку, что видно из преобразования слов *ego* → *йива*, *полуживого* → *парусивава*, где букве *g*, передающей звук [в], соответствует в «новорусском» *v* (в случае применения правил к письменному языку было бы *k*).

## КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

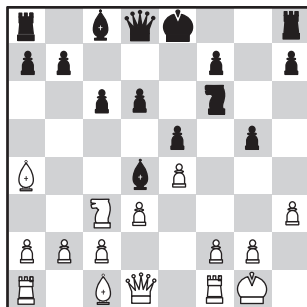
**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 216-40-40**

## Турнир В БУХАРЕСТЕ

В условиях продолжающейся пандемии турниры с классическим контролем остаются довольно редким событием, и внимание любителей шахмат в начале июня было приковано к проходившему в столице Румынии представительному турниру, победу в котором одержал азербайджанский гроссмейстер Шахрияр Мамедьяров.

**Ф.Каруана – Ш.Мамедьяров  
Бухарест, 2021**

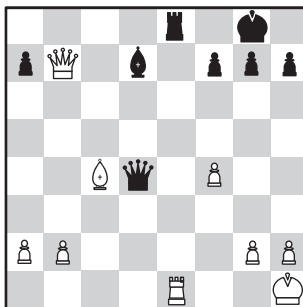
1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♗b5 ♗f6 4. d3 ♗c5 5. ♗c3?! Редкий и объективно сомнительный ход. Основные продолжения 5. ♗c6 и 5. c3. 5...♗d4!? 6. ♗a4. В случае принятия жертвы: 6. ♗e5 0-0 у черных слишком опасная инициатива. 6...c6 7. 0-0 d6 8. ♗d4 ♗d4 9. h3 g5?! Смелый, но неточный ход.



10. ♗e2? Слишком пассивный ход, помогающий черным провести атаку. Опровергнуть их замысел могло активное 10. ♗d5! h6 11. c3 ♗b6 12. ♗b6 ab 13. ♗b3, и без чернополюсного слона вести атаку Шахрияру было бы гораздо сложнее. 10...♗b6 11. c3 ♗g8 12. d4 ♗e4 13. ♗c2 d5 14. ♗e4 de 15. de ♗d1 16. ♗d1 g4 17. h4 g3 18. ♗d4 (на 18. ♗e3 черные продолжили бы атаковать путем 18...♗g4

19. ♗b6 ab 20. ♗e1 gf 21. ♗f2 0-0-0) ♗d8 19. fg ♗g3 20. ♗e1 ♗g4 21. ♗g5 ♗g5 22. hg ♗e7 23. ♗ad1?! Чуть больше шансов оставляло 23. ♗e3 ♗g5 24. ♗ae1 с давлением на пешку e4. 23...♗d7 24. e6 fe 25. g6 hg 26. ♗b3 e5 27. ♗a5 ♗e6, и у черных преимущество в две пешки, которое они технично реализуют. 28. ♗d2 ♗b8 29. b4 ♗f6 30. a4 ♗g3 31. ♗e4 ♗d5 32. ♗h4 ♗c3 33. ♗h7 b6 34. ♗c6 ♗c6 35. ♗c7 ♗c1+ 36. ♗f2 ♗f8 37. b5 ♗e6+ 38. ♗g3 ♗c3+ 39. ♗h2 ♗h8+ 40. ♗g1 ♗h1+ 41. ♗h1 ♗g2+ 42. ♗g2 ♗c7 43. ♗g6+ ♗d5 44. a5 ♗c5 45. ab ab 46. ♗e6 ♗b5 47. ♗e5+ ♗c5 48. ♗e1 ♗g5, белые сдались.

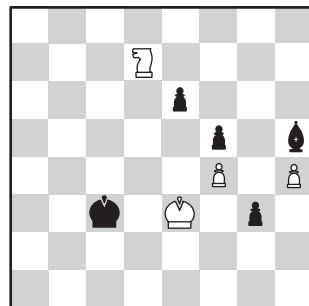
**Ш.Мамедьяров – Л.Аронян  
Бухарест, 2021**



Позиция на доске возникла после 22 ходов: в миттельшпиле белые смогли выиграть пешку, а после неудачного последнего хода черных (22...♗e8?) добавляют к ней еще одну. 23. ♗e8+ ♗e8 24. ♗f7+! Простая, но редко встречающаяся комбинация. Слона нельзя брать из-за линейного мата: 24...♗f7 25. ♗c8+!. 24...♗f8 25. ♗b3 ♗c5 (обе белые пешки «отравлены»: 25...♗b2 26. ♗b4x; 25...♗f4 26. ♗a7 ♗c1+ 27. ♗g1 ♗b2 28. ♗c5x) 26. ♗d5 ♗c1+ 27. ♗d1 ♗f4. Пешка b2 снова неприкосновенна: 27...♗b2 28. ♗d6+ ♗g8

29. ♗b3+ с матом. 28. ♗c5+ ♗g8 29. ♗a7. Белые восстанавливают преимущество в две пешки. Остальное – дело техники. 29...h5 30. h3 ♗c6 31. ♗b3+ ♗h7 32. ♗f7 ♗c1+ 33. ♗h2 ♗c5 34. ♗g8+ ♗h6 35. ♗e6+ g6 36. ♗f6 ♗d7 37. h4 ♗c7+ 38. g3 ♗c8 39. ♗f4+ ♗h7 40. ♗f7+, и черные сдались.

**Б.Дяк – Л.Аронян  
Бухарест, 2021**



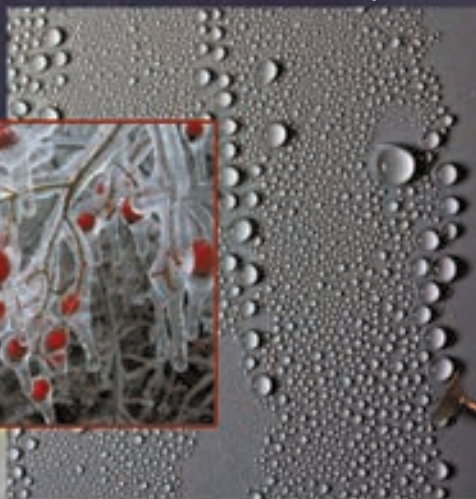
К такой позиции пришла партия после 60 ходов. Белые рассчитывали на спасение после 60...♗c2 61. ♗f6 ♗d1 62. h5!, однако черные нашли этюдное 60...e5! – пешка становится под два боя, но оба взятия ведут к поражению: в случае 61. fe следует 61...f4+, отвлекая короля от пешки g3. В партии последовало 61. ♗e5 ♗c2 62. ♗d3 ♗d1, и белые в цугцванге – 63. ♗d4 g2, а на любой отход коня последует ♗e1-♗f1 с дальнейшим g2-g1♗, поэтому **белые сдались**.

*А.Русанов*



# Прогулки с физикой

Как защитить  
цветущие плодовые деревья  
от весенних заморозков?



## Заморозки и ... дождевание

